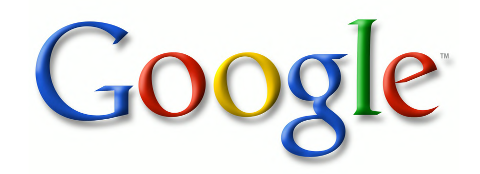
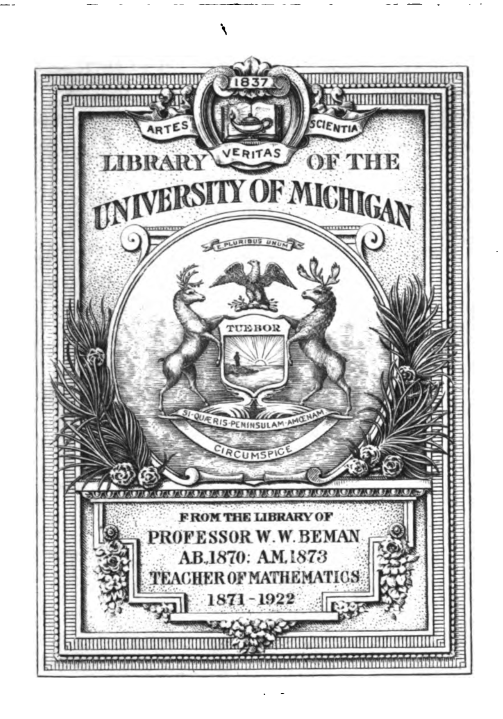
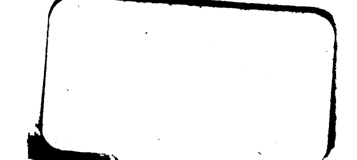



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB.1870: AM.1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922



Ausführliches Lehrbuch

der

Elementar-Geometrie.

Ebene und körperliche Geometrie.

Zum

Selbstunterricht

mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens

bearbeitet

von

H. B. Lübsen.

Störe mir meine Kreise nicht.
Archimedes.

Siebenzehnte unveränderte Auflage mit 193 Figuren im Text.

Leipzig.
Friedrich Brandstetter.
1872.

Zu Archimedes kam ein wissbegieriger Jüngling.
«Weihe mich,» sprach er zu ihm, «ein in die göttliche Kunst,
Die so herrliche Frucht dem Vaterlande getragen
Und die Mauern der Stadt vor der Sambuca beschützt!»
«Göttlich nennst Du die Kunst? Sie ist's,» versetzte der Weise;
«Aber das war sie, mein Sohn, eh' sie dem Staat noch gedient.»

Schiller.

Vorwort.

Dies kleine Werk ist seinem Titel gemäss in demselben Sinne abgefasst, wie meine andern Lehrbücher: nämlich mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens. Es ist mithin für diejenigen geschrieben, welche sich dem practischen Leben widmen und deshalb ausser dem formellen Nutzen, den das Studium der reinen Mathematik gewährt, auch noch einen materiellen Nutzen davon ziehen und sich in den Stand setzen wollen, die grossen und merkwürdigen Resultate, welche die Mathematik und Naturwissenschaften in neuerer Zeit hervorgerufen haben und fortwährend noch hervorrufen werden, deutlicher wahrnehmen, selbst mit daran Theil nehmen, jedenfalls aber, um Werke darüber lesen zu können, welche die mathematische Sprache als bekannt voraussetzen.

Hamburg, den 12. December 1850.

Lübsen.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei dieser neuen Auflage ist nur auf grössere Correctheit geachtet worden. Eine Vermehrung würde dieselbe nur theurer, aber nicht nützlicher gemacht haben.

Es kann sich treffen, dass diese neue Auflage Jemandem in die Hände fällt, der auch das 1853 erschienene Lehrbuch der Geometrie von F. Krohn, Lehrer an der Navigationsschule in Stolpmünde, besitzt. Ich sehe mich deshalb — um den Schein und die leicht mögliche Verdrehung des

Urtheils zu verhüten, als wenn ich von Krohn's Compilation hätte profitiren können — zu der Rüge genöthigt: dass dieser Plagiarius, wie schon das Centralblatt No. 52 bemerkt, sein ganzes Werk aus andern Büchern compilirt und aus meiner Geometrie unter andern auf einmal fünftehalb Seiten ganz wörtlich abgeschrieben hat.

Aus demselben Grunde muss ich dänische Leser darauf aufmerksam machen, dass auch — was ich zufällig und sehr spät erfahre — ein Herr P. C. Berg, bei Abfassung seiner „almindelige Mathematik" mein Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, ohne Angabe der Quelle, brav benutzt hat.

Hamburg, im November 1854.

Lübsen.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die rasche Folge dieser neuen Auflage spricht wohl dafür, dass die, übrigens leichte Prophezeihung des Philosophen Herbart: „Die nächste Generation wird die Nothwendigkeit einsehen, Mathematik zu studiren," schon jetzt in Erfüllung geht

Hamburg, im October 1857.

Lübsen.

Einleitung.

I.

Muthmasslicher Ursprung der Geometrie.

Die ursprüngliche Geschichte aller menschlichen Kenntnisse vor der Sündfluth ist bekanntlich in der Sündfluth untergegangen, und alles, was man über einzelne, vermeintlich gerettete Bruchstücke berichtet, verliert sich in reine Muthmassungen und Fabeln, die keinen Glauben verdienen.

Auch noch gleich nach der Sündfluth, als man die Welt wieder von vorne anfing, hat sich die erste Spur der allgemeinen Geschichte in tiefes, nie zu lichtendes Dunkel gehüllt.

Erst lange nachher, als die egyptische Finsterniss riss (wovon in den meisten Schulen noch ein Stück zu sehen ist), bricht eine Art Dämmerung in der Geschichte an, und hiernach soll diejenige mathematische Wissenschaft, welche den Namen „Geometrie“ als Titel führt, zuerst durch die alljährlichen Ueberschwemmungen des Nils veranlasst sein. (Herodot.)

Wenn der Nil, so wird erzählt, aus seinen Ufern trat, so pflegte er nicht selten die Grenzen und Befriedigungen der egyptischen Ländereien zu zerstören und unkenntlich zu machen, sondern auch nach und nach hier ein Stück Land abzureissen und dort wieder anzusetzen. Es musste also oftmals von Neuem wieder getheilt und Jedem das Seinige zugewiesen werden, um nach Recht und Billigkeit die Steuern reguliren zu können.

Diese Theilungen und Grenzenbestimmungen mögen nun aber anfangs auf's Gerathewohl, durch blosse Schätzung nach

dem Augenmasse bewirkt und deshalb manche Streitigkeiten entstanden, und dadurch denkende Köpfe veranlasst sein, auf untrüglichere, nicht von dem Augenmasse abhängende Mittel zu sinnen.

Auf solche und ähnliche Veranlassungen sind nun wahrscheinlich einige für die Landmesskunst wichtige Sätze erfunden (z. B. gleichlaufende grade Linien abzustecken und auszumessen, Nivelliren etc.), deren Richtigkeit — weil sie sich nicht bloss auf Erfahrung, sondern auf reine Vernunft gründeten — jeder Vernünftige anerkennen musste und nach welchen die fraglichen Grössen und Grenzenbestimmungen sicher geleitet, etwa begangene Irrthümer und absichtliche Betrügereien leicht entdeckt und berichtigt werden konnten.

Ausserdem bezeugen die vielen grossen Pyramiden, Gnomonen, unterirdischen Gänge, Grabmäler, Palläste, Schiffsgräben und Canäle *), dass die Egypter sich viel mit der Baukunst, Fortification, Astronomie und Schifffahrt beschäftigt haben, wozu einige Kenntniss der Geometrie nicht allein sehr nützlich, sondern unentbehrlich war.

Kurzum, vielfältige practische Bedürfnisse müssen schon frühe, bei allen civilisirten Völkern, die Cultur und Pflege dieser wohl uralten Wissenschaft (Geometrie) veranlasst haben. Denkende Köpfe, bei den Egyptern wohl besonders die Priester, bei den Griechen, Persern, Arabern, Chinesen etc. die Philosophen, unter denen auch Fürsten, strengten sich an, noch immer mehr neue geometrische Sätze zu entdecken. Hie und da unternahm es dann Einer (später z. B. der Grieche Euclides 300 v. C. durch seine Reisen in Egypten etc.) dieser anfangs sehr zerstreuten geometrischen Lehren alle habhaft zu werden und sie, nicht allein wegen ihres practischen Nutzens,

*) «Um die Kosten der Canalbauten zu decken, wurde von Sesostris das der Kriegerkaste zugewiesene Drittheil des Landes einer Grundsteuer unterworfen. Die Ausdehnung der Ueberschwemmung bestimmte dort jährlich, welche Ländereien steuerbar sein würden, und da feste Grenzen unter diesen Umständen nutzlos gewesen wären, so musste alljährlich mittelst vorgenommener Vermessung jedem Grundbesitzer ein gleiches Stück des vom Nil befruchteten Landes zugetheilt werden. Beides, die Landesvermessung, wie die Steuererhebung, war ein Geschäft der Priesterkaste.» S. Reynier, De l'écon. polit. et rurale des Égyptiens et Carthaginois, p. 190, und Rau, Grunds. der Finanzwiss.; Pölitz, Neue Jahrb. der Politik und Geschichte, 1840, Octbr.-Heft, und Montucla, Histoire des mathématiques

sondern auch als äusserst merkwürdige Producte des menschlichen Scharfsinns, zu ordnen, zu vervollkommnen, zum vorkommenden Gebrauche und zur Bildung des Geistes für die Nachwelt aufzubewahren, und weil doch die Erd- oder Feldmesskunst die muthmassliche Veranlassung zur Entdeckung dieser Sätze gewesen war, so gab oder liess man der ganzen Sammlung derselben den Titel Geometrie (Erdmessung).

Seitdem ist aber diese Wissenschaft so sehr erweitert und vervollkommnet, dass für die richtige Bezeichnung derselben der ursprüngliche Name „Geometrie“ in der wörtlichen Bedeutung „Erdmessung“ gar nicht mehr passt, oder vielmehr nie gepasst hat. Die Erd- oder Feldmesskunst ist allerdings eine Anwendung der Geometrie, aber auch auf andere ganz verschiedene Wissenschaften wird sie angewandt, z. B. auf Astronomie, Schifffahrtskunst, Optik, Mechanik, Wasserbaukunst, Fortification etc., und so unpassend es also sein würde, das Wort *„Geometrie“* durch Himmelsmesskunst, Mechanik etc. zu übersetzen, eben so unpassend würde es sein, dies Wort jetzt noch in der anfänglichen Bedeutung *„Erdmesskunst“* zu nehmen.

Um nun aber einen vorläufigen Begriff von dieser Wissenschaft geben und andeuten zu können, worauf man beim Studium derselben seine Aufmerksamkeit zu richten und was man von ihr zu erwarten hat, ist es durchaus nothwendig, erst ihren eigentlichen Gegenstand, Zweck und Wesen hervorzuheben und kennen zu lernen, so wie auch einige nothwendige Vorbegriffe vorauszuschicken.

II.

Gegenstand der Geometrie.

Räumliche Grössen: Körper, Flächen und Linien.

Körper. Jeder Mensch hat die Vorstellung von dem nach allen Richtungen bis in's Unendliche ausgedehnten Raume. Von diesem unbegrenzten Raume denke man sich beliebig grosse, von allen Seiten begrenzte Stücke (z. B. den Raum, welcher von den Wänden, Decke und Boden eines Zimmers eingeschlossen (begrenzt) ist, so hat man sich das gedacht,

was man Körper oder auch wohl geometrische Körper nennt, um sie durch dieses Beiwort „geometrisch" von den materiellen oder physischen Körpern zu unterscheiden, welche ausser ihrer Ausdehnung und Form noch andere Merkmale haben, wie z. B. Farbe, Gewicht etc. Der geometrische Körper ist also nichts Materielles, sondern nur ein begrenzter leerer Raum. Spricht man von der Grösse und Form eines physischen Körpers, so abstrahirt man von dem Stoffe, aus welchem er besteht, ob aus Holz, Eisen etc., das ist gleichgültig, indem dann nur der leere Raum gemeint ist, welchen der physische Körper einnimmt (ausfüllt).

Flächen. Die Grenzen eines Körpers nennt man Flächen und alle Flächen, welche einen Körper begrenzen (einschliessen), bilden zusammen dessen Oberfläche. Die Flächen eines Körpers können also, eben weil sie einen Raum begrenzen, kein Theil davon sein, mit andern Worten: Flächen haben keine Dicke, sind nur Grössen im Raume. Will man sich eine Fläche durch ein Blatt Papier versinnlichen, so muss man sich nur die eine Seite desselben denken, denn wie dünn es auch sein möge, so hat es doch als materieller Körper nothwendig einige Dicke und ist mithin keine mathematische Fläche.

Linien. Die Grenzen einer Fläche nennt man Linien. Die Linien können also, eben weil sie eine Fläche begrenzen (einfassen), kein Theil davon sein, weil ein Theil einer Fläche doch selbst wieder eine Fläche, mithin nicht die Grenze wäre. Die Linien sind also auch nur Grössen im Raume, sie haben weder Dicke noch Breite, sondern nur eine Ausdehnung, nämlich Länge.

Puncte. Die Grenzen einer Linie nennt man Puncte. Der mathematische Punct kann also, eben weil er die Grenze (Anfang, Ende) einer Linie bezeichnet, kein Theil davon sein, mithin auch gar keine Ausdehnung haben und deshalb auch keinen Stoff zu weiteren Betrachtungen geben.

Wir unterscheiden demnach nur dreierlei Arten räumliche Grössen, nämlich: Körper, Flächen und Linien, und diese reinen Gedankendinge sind nun der eigentliche Gegenstand mit welchem die Geometrie sich beschäftigt.

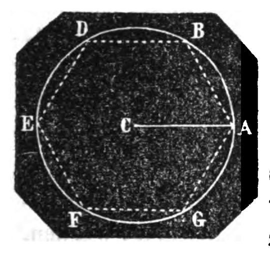
III.

Zweck der Geometrie.

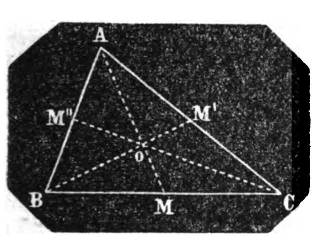
Entdeckung der Eigenschaften; Construction und Ausmessung der räumlichen Grössen.

1. Die Geometrie soll die Eigenschaften der räumlichen Grössen entdecken und kennen lehren.

So hat z. B. die in sich zurücklaufende krumme Linie, welche man Kreis nennt *), unter andern merkwürdigen und wichtigen Eigenschaften auch die, dass sich der Halbmesser desselben gerade sechsmal in die krumme Linie abtragen lässt.



Nimmt man nämlich die vom Mittelpunct C nach A gehende grade Linie, welche man Halbmesser nennt, in den Zirkel und steckt sie erst von A nach B ab, dann von B nach D, von D nach E etc., so muss man zum sechstenmale genau wieder auf den Punct A zurückkommen, zugleich ist hierdurch die Kreislinie in sechs gleiche Bögen getheilt. Ebenso hat jede andere räumliche Grösse viele merkwürdige Eigenschaften. So hat z. E., um noch ein Erläuterungs-Beispiel anzuführen, ein jedes Dreieck



die (für die Mechanik wichtige) Eigenschaft, dass die drei, von den Endpuncten A, B, C nach den Mitten M, M', M'' der gegenüber liegenden Seiten gezogenen graden Linien sich immer in einem und demselben Puncte o treffen müssen u. m. dgl.

2. Die Geometrie lehrt die räumlichen Grössen (Figuren) richtig und leicht construiren (zeichnen). Wollte z. B. ein Architect ein regelmässiges Sechseck zeichnen, d. i. eine Figur von sechs gleichen Seiten und sechs gleichen Ecken und zwar

---

*) Zu einer vorläufigen Einleitung genügen die gewöhnlichen populären Begriffe von graden und krummen Linien, Kreis, Dreieck etc. vollkommen und diese dürfen wir auch unbedenklich bei jedem zum Studium der Geometrie fähigen Knaben voraussetzen.

so, dass jede Seite 3 Zoll lang wäre, so würde ihm dieses, wenn er Geometrie verstände, ein leichtes sein. Er brauchte sich ja nur der eben erwähnten Eigenschaft des Kreises zu erinnern, mit einem Halbmesser von 3 Zoll einen Kreis zu beschreiben und den Halbmesser nur unmittelbar darin herumzutragen und die so gefundenen sechs Theilungspuncte durch grade Linien zu verbinden. Ebenso lehrt die Geometrie jede andere verlangte Figur richtig zu construiren.

3. Die Geometrie lehrt ein sicheres Verfahren kennen, die räumlichen Grössen genau auszumessen. Frägt z. B. Jemand: wie viel kann auf jenem viereckigen Stück Feld mehr wachsen, als auf diesem fünfeckigen; wie viel kann dieses Schiff laden, um nicht tiefer als zehn Fuss zu gehen; wie findet man den richtigen Weg durch das bahnlose Meer; wie werden Land- und See-Karten angefertigt; wie findet man die Entfernung des Mondes von der Erde, die Zeit, nach welcher eine Sonnenfinsterniss eintritt, ein Comet wieder erscheint; wie muss ein Geschütz gerichtet werden, damit die Kugel einen bestimmten Punct treffe u. m. dgl., so können solche und ähnliche Fragen nur von einem der Geometrie Kundigen beantwortet werden.

IV.

Begriff der Geometrie.

Nachdem nun die zur Bildung des hier geforderten vorläufigen Begriffs nöthigen Vorstellungen vorausgeschickt worden, kann man also, um von dem Umfang und Inhalt einer ganzen Wissenschaft so viel wie möglich in ein paar Worten zusammen zu fassen, sagen: Die Geometrie ist die Wissenschaft von den Eigenschaften, der Construction und Ausmessung der räumlichen Grössen.

V.

Methode der Geometrie.

Aus dem Vorhergehenden erhellet wohl, dass die Hauptaufgabe der Geometrie darin besteht: die Eigenschaften der räumlichen Grössen zu entdecken. Auf welche Weise soll dies aber geschehen? Wie ist man z. E. wohl zur Kenntniss des

vorhin erwähnten merkwürdigen Satzes gelangt: dass sich der Halbmesser eines Kreises gerade sechsmal in demselben herumtragen lasse, so wie zu dem andern Satze: dass die drei von den Eckpuncten eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüber liegenden Seiten gezogenen graden Linien sich immer in einerlei Punct durchschneiden? Hat man diese unumstössliche Wahrheiten etwa durch einen glücklichen Zufall, durch Erfahrung entdeckt, indem man ganz gedankenlos, gleichsam spielend, den Halbmesser in den Kreis herumtrug und jene drei Linien in dem Dreiecke zog, ohne die Entdeckungen zu ahnen, von welchen man nachher überrascht wurde?

Viele solche einfache Sätze der Geometrie können und mögen in grauer Vorzeit wirklich auf diese Weise durch blosses Probiren zuerst entdeckt sein, allein die meisten und wichtigsten Eigenschaften der räumlichen Grössen würden sich auf diese Weise: durch Versuche und Erfahrungen unmöglich finden lassen. Auch würden die so gefundenen Sätze keine allgemeine Gültigkeit haben und also auch nicht auf den Namen: mathematische Wahrheiten Anspruch machen können, welche immer so evident, d. h. so einleuchtend gewiss und zuverlässig sein müssen, dass man auf die unumstössliche Richtigkeit derselben unbedenklich bauen kann.

Wollte z. E. Jemand den eben vom Dreieck erwähnten Satz behaupten und die unbestreitbare Richtigkeit desselben dadurch beweisen, dass er vor unsern Augen die fraglichen drei Linien zöge, und nun sagen: seht ihr, dass die drei Linien sich wirklich in einerlei Punct schneiden! so würden wir ihm doch gleich zurufen: stop! Du bist durch Deine uns eben gezeigte Probe, strenge genommen, noch nicht mal berechtigt, nur die wahrscheinliche, viel weniger noch die absolute Richtigkeit Deines Satzes zu behaupten; denn angenommen, Deine Zeichnung sei ohne Irrthum, so genau, als es Deine Sinne und Instrumente erlauben, so gilt Dein behaupteter Satz doch nur von diesem einen Dreiecke, oder von so vielen als Du untersucht hast; welcher Grund berechtigt Dich aber, von einem oder ein paar Dreiecken auf alle übrigen zu schliessen, deren Zahl, weil unendlich, Du doch nicht alle durchprobiren kannst?

Hiernach möchte es wohl schon dem ersten Anfänger einleuchten, dass, wenn die mathematischen Wahrheiten diesen Namen verdienen, nämlich unumstössliche Gewissheit und all-

gemeine Gültigkeit haben sollen, dieselben dann auch als eine absolute Nothwendigkeit durch die reine Vernunft erkannt werden müssen. Dies ist auch der Grund, weshalb man die reine Mathematik eine reine Vernunftwissenschaft nennt. Kein Satz, kein Schluss gründet sich auf Erfahrung. Alles muss hier durch reine Vernunftspeculation, aus reinen Verstandesbegriffen abgeleitet und gefunden werden, und eben dadurch erhalten die mathematischen Sätze ihre einleuchtende Gewissheit und Nothwendigkeit. Dieser unumstösslichen Gewissheit halber standen die mathematischen Wissenschaften auch bei allen Philosophen des Alterthums, deren Lehren und Sitten die vollkommensten waren, in so hoher Achtung. Besonders waren es die griechischen Philosophen Thales, Pythagoras, Hippocrates, Plato, Aristoteles, Euclides und Archimedes, welche sich für die mathematischen Wissenschaften interessirten und deren Studium nicht allein des practischen Nutzens halber, sondern auch als eine practische Logik, die Entwickelung der Geisteskräfte fördernd, und das Urtheil schärfend, so dringend empfahlen. Von Plato wird erzählt: er habe keinen Schüler ohne mathematische Vorbildung zu seinem Unterricht gelassen. Der berühmte Arzt Hippocrates soll seinem Sohne dringend gerathen haben, mit dem Studium der Arzeneikunst auch das der Mathematik zu verbinden.*) Genug, der Anfänger wird sich bald selber überzeugen, dass jeder, der mit Nutzen Mathematik studiren will, auch genöthigt ist, sein Denkvermögen in Thätigkeit zu setzen und sich an ein solides Urtheil zu gewöhnen, wozu ihm unerschöpflicher Stoff dargeboten wird. Ohne Nachdenken und Speculiren würden die mathematischen Wissenschaften nicht erfunden sein, und soll das Studium derselben Erfolg haben, Ausbildung des Verstandes, sichere Praxis, schnelle Combination bekannter Wahrheiten und Auffindung neuer erreicht werden, so muss sich der Anfänger gleich von Haus aus wissenschaftlich bilden, die vorgetragenen Lehren nicht bloss auf's Wort glauben und mechanisch auffassen, sondern dieselben so zu durchdringen suchen, dass er die vollkommenste Ueberzeugung erlange und mithin einsieht, dass es durchaus so sein muss, wie behauptet worden.

*) Hippocrates mag hiebei wohl an die Physiologie gedacht haben, die in neuerer Zeit so eifrig cultivirt wird und durchaus Kenntnisse der Mathematik und Naturwissenschaft verlangt.

VI.

System der Geometrie.

Wie schon in IV. gesagt, ist die Geometrie die Wissenschaft von den Eigenschaften, der Construction und Ausmessung der räumlichen Grössen und ihre Hauptaufgabe ist: die Eigenschaften derselben zu entdecken. Nun kann man sich aber von jeder der drei Arten räumlicher Grössen: Körper, Flächen und Linien unzählige verschieden geformte denken. So sind z. B. die Körper, welche man Würfel, Kegel, Kugel, Cylinder etc. nennt, an Gestalt (Form, Figur) himmelweit verschieden; ebenso die Flächengrössen, Dreieck, Viereck, Kreis etc.; ausser der Kreislinie lassen sich noch unzählige anders gestaltete krumme Linien denken. Aber alle diese unzähligen Gestalten betrachten und ihre Eigenschaften entdecken zu wollen, würde offenbar, eben weil ihre Zahl unendlich ist, unmöglich sein. Glücklicherweise ist dies aber auch gar nicht nöthig. Es hat sich nämlich gezeigt, dass man zu Bildung einer vollständigen Geometrie dennoch nur sehr wenige von den unzähligen räumlichen Grössen zu betrachten und genau zu erforschen braucht, nämlich diejenigen, die uns gleichsam den Schlüssel zur Kenntniss aller übrigen geben.

Die wichtigsten Eigenschaften, welche man bei diesen wenigen räumlichen Grössen entdeckt hat, sind nun, wie schon bemerkt, von unsern Vorfahren aufgezeichnet worden. Als die beste Form sie mitzutheilen und zu lehren, hat man sie in sogenannte Lehrsätze gekleidet und diese nach einer gewissen, durch die Wissenschaft selbst vorgeschriebenen systematischen Ordnung an einander gereiht. Denn, so wie in der Arithmetik ein gewisses systematisches Fortschreiten nothwendig beobachtet werden muss, und man z. B. nicht eher das Dividiren lernen kann, bevor man das Multipliciren gelernt hat, diesem aber das Addiren und diesem wiederum das Zählen vorhergehen muss, so müssen auch in der Geometrie die Lehrsätze in einer gewissen Ordnung auf einander folgen, und der Anfänger wird deshalb schwerlich einen Satz gehörig verstehen, wenn er nicht alle vorhergehenden Sätze, welche ihn begründen und wie Glieder einer Kette mit ihm zusammenhängen, gehörig verstanden hat.

Um die unumstössliche Richtigkeit dessen, was jeder Lehr-

satz behauptet, zu bestätigen, sind jedesmal die nothwendigen Gründe dafür in Form eines Beweises hinzugefügt und hierauf folgen dann in der Regel noch Beispiele, um den mitgetheilten Satz practisch einzuüben und dem Gedächtniss einzuprägen.

Sämmtliche im System der Geometrie enthaltenen Lehrsätze etc. pflegt man auch wohl die Elemente (Fundamente) derselben und deshalb das System selbst die Elementar-Geometrie zu nennen.

Schliesslich möge hier noch erwähnt werden, dass altem Herkommen nach, die Geometrie in zwei Haupttheile getheilt wird, nämlich in: ebene und körperliche Geometrie. Die ebene Geometrie betrachtet nur solche Constructionen, welche ganz in einer ebenen Fläche liegen; die körperliche Geometrie dagegen diejenigen räumlichen Grössen, welche nicht in einer ebenen Fläche liegen und deren Bilder deshalb auch nur perspectivisch gezeichnet werden können.

Mit der Betrachtung der einfachsten räumlichen Grössen müssen wir natürlich beginnen und zwar zunächst mit den Bestandtheilen der ebenen Figuren, nämlich mit der Betrachtung der graden Linien und Ecken. Denn obgleich jeder Mensch diese Begriffe schon hat und bei nüchternem Muthe gewiss keine grade Linie mit einer krummen verwechseln wird, so ist doch eine genauere mathematische Bestimmung dieser Begriffe nothwendig.

Wer nun gesunden Menschenverstand und für merkwürdige Schöpfungen des menschlichen Geistes Sinn hat, nicht denkfaul ist und sich nicht durch die ersten Schwierigkeiten (die sich übrigens durch fleissiges Repetiren beseitigen lassen) abschrecken lässt, der wird nach Ueberwindung derselben, sich immer mehr und mehr für die mathematischen Wissenschaften interessiren, sich über die schöne Ordnung in denselben freuen und von ihrer überzeugenden Gewissheit überrascht, mit zunehmender Spannung die allmälige Entwickelung derselben verfolgen.

Um zur Kenntniss der ganzen Geometrie zu gelangen, hat man übrigens im Ganzen nur etwa hundert eigentliche (hier mit gesperrter Schrift bezeichnete) Sätze zu lernen, und diese werden die darauf zu verwendende Zeit, wenn wöchentlich auch nur zwei statt vier gelernt werden, reichlich lohnen.

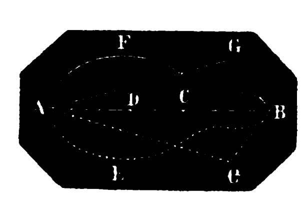
Erster Theil.

Ebene Geometrie.

Erstes Buch.

Von den graden Linien besonders, von der Ebene und vom Kreise vorläufig die Erklärungen.

1.



Erklärung. Eine grade Linie ist diejenige, welche nicht aus ihrer Lage kommt, indem sie sich um ihre beiden festen Endpuncte dreht.*)

Erläuterung. Zwischen zwei Puncten A und B sind offenbar unzählig viele Linien möglich, z. B. die von A über F nach B, oder die von A durch G nach B gehende. Stellt man sich nun vor: alle diese Linien drehten sich um die beiden als fest gedachten Endpuncte A und B, so dass sie in andere Lagen, z. B. in die punctirte kommen, so lässt sich noch eine solche von A nach B gehende Linie denken, welche bei dieser Umdrehung nicht aus ihrer Lage kommt, gleichsam die Um-

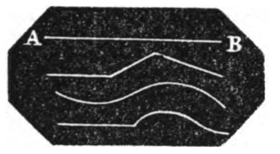
---

*) So hörten wir einmal Gauss bei der Erklärung des Fernrohrs und dessen richtigem Gebrauch den Begriff der graden Linie festsetzen. Diese Erklärung ist theoretisch fruchtbar, wie die gleich daraus folgenden Sätze zeigen; ausserdem ist das angegebene Merkmal practisch wichtig, z. B. bei der Justirung eines Fernrohrs, richtigen Bohrung eines Cylinders etc.



drehungsachse bildet, in welcher also alle Puncte, wie C, D, ruhen. (Man breche ein Stück Papier, so ist der entstehende Bruch [Falze] eine grade Linie.)

2.



Erklärungen. Eine grade Linie nennt und bezeichnet man durch zwei an ihre Endpuncte gesetzte Buchstaben (Ziffern). Will man auch den Lauf der Linie andeuten und sich dieselbe durch die fortschreitende Bewegung des einen Endpuncts gegen den andern hin, beschrieben denken, so schreibt man desjenigen Punctes Buchstaben voran, von dem die Bewegung ausgeht. So bedeutet z. B. AB oder nach der neuern Bezeichnung (Carnot) $\overline{AB}$, die von A nach B gehende grade Linie, und eben so BA oder $\overline{BA}$ dieselbe Linie in umgekehrter Richtung.

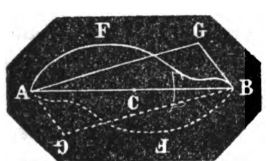
Ein aus graden Linien von verschiedenen Richtungen zusammengesetzter Zug heisst eine gebrochene Linie.

Eine stetig gebrochene Linie, in welcher also kein Theil grade ist, heisst eine krumme Linie.

Ein aus graden und krummen Linien bestehender Zug heisst eine gemischte Linie.

Statt grade Linie, sagt man gewöhnlich kurzweg: Linie.

3.



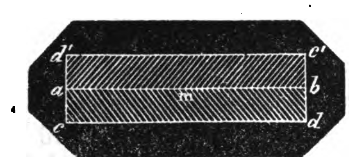
Lehrsatz. Durch zwei Puncte A und B ist nur eine einzige grade Linie möglich.

Beweis. Dies folgt aus dem §. 1 festgesetzten Begriff der graden Linie. Zufolge der dort gegebenen Erläuterung kann es zwischen A und B offenbar nur eine einzige solche Reihe von Puncten geben, die nicht aus ihrer Lage kommen, indem man die ganze Figur (in Gedanken) um die beiden festen Endpuncte A, B dreht.

Zusatz. Hieraus folgt noch eine andere, jedoch nicht eigenthümliche Eigenschaft der graden Linie. Wird nämlich eine grade Linie $\overline{AB}$ so umgelegt (um ihre Mitte C in der

Bildfläche herumgedreht), dass das Ende A nach B und dafür B nach A und folglich F nach Ⅎ kommt, so muss nothwendig (weil zwischen zwei Puncten nur eine grade Linie möglich ist) die grade Linie in ihrer jetzigen umgelegten Lage mit der vorigen genau zusammenfallen und mithin jede grade Linie an der einen Seite genau so beschaffen sein, wie an der andern.

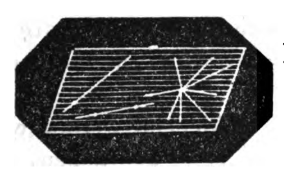
4.



Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Seite ab eines zum Ziehen grader Linien dienenden Lineals auch wirklich grade ist.

Auflösung. Man ziehe längs der zu prüfenden Kante ab eine Linie so fein als möglich; lege hierauf das Lineal um (drehe es in der Bildfläche um die Mitte m), so dass a nach b und b nach a, mithin c nach c' und d nach d' kommt. Schliesst dann dieselbe Kante des Lineals sowohl in dieser Lage als auch, wenn es jetzt längs der gezogenen Linie fortgeschoben wird, an dieselbe immer genau an, so ist das Lineal richtig.

5.



Erklärung. Eine Fläche ist und heisst e b e n oder eine E b e n e, wenn eine grade Linie, die zwei b e l i e b i g e Puncte mit ihr gemein hat, auch mit allen ihren übrigen Puncten darin enthalten ist; oder mit andern Worten: eine Fläche heisst eben, wenn man von jedem ihrer Puncte aus, nach allen Richtungen grade Linien in derselben ziehen kann.

Es sei hier noch ein für allemal daran erinnert, dass im ersten Theile der Geometrie nur solche Figuren betrachtet werden, die ganz in einer ebenen Fläche (Ebene) liegen,

wofür das Papier oder die Tafel, worauf sie gezeichnet sind, stets angenommen wird. Eine dreieckige Figur z. B., welche auf einer krummen Fläche, etwa auf einer Kugelfläche gezeichnet ist, gehört also nicht zur ebenen, sondern zur körperlichen Geometrie.

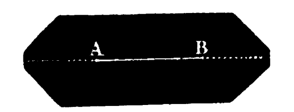
6.

Aufgabe. Wie kann man erkennen, ob eine Fläche eben oder eine Ebene ist.

Auflösung. Man passe ein richtiges Lineal an verschiedenen Stellen auf die zu prüfende Ebene und sehe zu, ob die Kante des Lineals mit allen ihren Puncten genau anschliesst. (§. 5.)

Anmerkung. Ausser diesem einfachen Prüfungsmittel giebt es noch viel schärfere. Vollkommen ebene Flächen existiren übrigens nur in Gedanken. Der feinern Technik wird es schon als Meisterstück angerechnet, wenn sie eine Fläche nur von der Grösse eines Kartenblattes so eben liefert, dass sie die erwähnten strengern Prüfungsmittel vertragen kann. Unsere gewöhnlichen Tische, Spiegelgläser etc. werden meistens für eben gehalten, strenge untersucht, finden sich aber immer Erhöhungen und Krümmungen darauf.

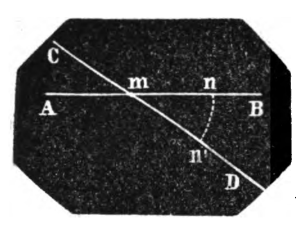
7.



Lehrsatz. D u r c h z w e i P u n c t e A, B, i s t d i e L a g e u n d R i c h t u n g d e r d a d u r c h g e h e n d e n g r a d e n L i n i e $\overline{AB}$, n ä m l i c h d e r L a u f i h r e r g r a d l i n i g t e n V e r l ä n g e r u n g e n (d i e m a n s i c h, n a c h b e i d e n S e i t e n h i n, b i s i n's U n e n d l i c h e d e n k e n k a n n), v o l l k o m m e n b e s t i m m t.

Beweis. Man stelle sich vor, die Bildebene werde, wie in §. 1, um die beiden festen Puncte A, B gebrochen, so entsteht in der ganzen unendlichen Ausdehnung der Bildebene nur e i n e und eben deshalb durch die beiden Puncte A, B bestimmte Linie (Falze), welche in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung das §. 1 erwähnte Merkmal hat. Es ist also nicht möglich, eine grade Linie auf verschiedene Weise gradlinigt verlängert zu denken.

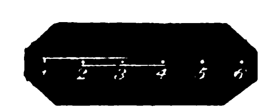
8.



Lehrsatz. Wenn zwei grade Linien zwei Puncte gemein haben, so bilden sie nur eine einzige grade Linie.

Beweis. Die beiden Linien *AB*, *CD* schneiden sich in dem Puncte *m*, den sie also gemeinschaftlich haben. Stellt man sich nun vor, die Linie *CD* drehe sich um den gemeinschaftlichen Punct *m*, so dass noch ein zweiter Punct *n'*, der Linie *CD*, mit einem Punct *n* der Linie *AB* zusammenfällt, so haben dann die beiden Linien zwei Puncte *m* und *n* gemein. Durch diese beiden Puncte ist aber nur eine grade Linie möglich (§. 3) und die gradlinigte Verlängerung derselben vollkommen bestimmt (§. 7). Mithin müssen auch zwei grade Linien, wenn sie zwei Puncte gemein haben, in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung zusammenfallen, mithin nur eine einzige grade Linie bilden.

9.



Lehrsatz. Wenn in einer Reihe von Puncten 1, 2, 3, 4, ... je drei auf einander folgende in grader Linie sind, so liegen sie alle zusammen in einer graden Linie (in einerlei Richtung).

Beweis. Erstlich haben die beiden graden Linien $\overline{123}$ und $\overline{234}$ zwei Puncte, 2 und 3, gemein und bilden folglich eine einzige grade Linie $\overline{1234}$ (§. 8); dann haben wieder die beiden graden Linien $\overline{1234}$ und $\overline{345}$ die zwei Puncte 3 und 4 gemein, und bilden mithin wieder eine grade Linie etc.

Ob eine Reihe von Puncten in grader Linie liegen, würde man practisch dadurch ermitteln können, indem man ein Lineal (Schnur) an die Puncte legt, und, wenn es zur Zeit nur über drei hinausreicht, an der ganzen Reihe fortschiebt und Acht giebt, ob die ganze Reihe oder je drei unmittelbar auf einander folgende genau anliegen. Hierauf beruht auch das Verfahren, mittelst eines kurzen Lineals eine grade Linie beliebig

weit zu verlängern, indem man nur darauf achtet, dass jeder folgende Zug mit dem vorhergehenden zwei Puncte gemein hat.

10.

Erklärung. Unter Entfernung (Abstand) zweier Puncte versteht man allemal die Länge der zwischen denselben enthaltenen graden Linie.

Ist also der Weg zwischen zwei Puncten nicht grade (geht er z. B. über einen Berg), so muss man die Länge desselben nicht mit der Entfernung (Abstand) der beiden Puncte verwechseln.

11.

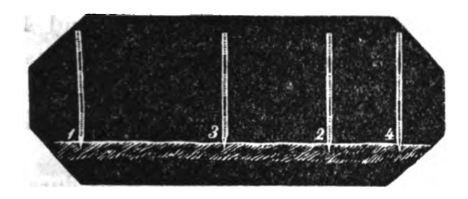
Von den, die grade Linie betreffenden Lehrsätzen wollen wir nun schliesslich noch einige practische Anwendungen auf das Feldmessen machen, und uns zu dem Ende auf ein ebenes freies Feld versetzt denken. Wie man in hügeligen und durchschnittenen Gegenden zu verfahren hat, kann erst in der körperlichen Geometrie gelehrt werden. Aus dem höchst einfachen Apparate, welcher zur Feldmesskunst erforderlich ist, entlehnen wir vorläufig nur einige runde Stangen, sogenannte Messstäbe. Diese sind etwa 1 Zoll dick, 8 bis 10 Fuss lang; an einem Ende, um sie leichter in den harten Boden stecken zu können, mit eisernen Spitzen versehen, und um sie besser aus der Ferne wahrnehmen zu können, Fussweise abwechselnd, roth und weiss mit Oelfarbe angestrichen. In Ermangelung solcher Stäbe sind für den Privatmann auch andere Stäbe, wenn sie nur ziemlich gleiche Dicke haben, gut genug.

Angenommen nun, es seien (siehe folgende Figur) mehre solcher Messstäbe vertical*) und so in die Erde gesteckt, dass eine grade Linie, welche die beiden äussersten berührt, auch alle mittlern berührt, so würden sie auch alle in einerlei Richtung stehen. Ob dies wirklich der Fall ist, sieht man

*) Vertical heisst diejenige Richtung, welche ein frei und ruhig hängendes Loth (Senkblei, d. i. ein Faden mit einer daran hängenden kleinen Kugel) angiebt. Für den hier angegebenen Zweck wird jedoch, ohne Hülfe eines Senkbleis, die verticale Stellung der Messstäbe stets nur nach dem Augenmasse genau genug bewirkt.

aber (nach ein paar Stunden Uebung) sehr leicht, indem man nur hinter einen der beiden äussersten Messstäbe tretend, an beiden Seiten hinsieht (visirt). Für Kurzsichtige, oder wenn die Reihe der Stäbe zu lang ist, wird ein Fernrohr nothwendig.

12.



Aufgabe. Auf dem Felde stehen zwei Messstäbe, 1 und 2. Zwischen dieselben soll ein dritter, 3, so eingesteckt werden, dass er mit 1 und 2 in einerlei Richtung steht.

Auflösung. Man muss erst die Linie $\overline{12}$ verlängern und deshalb in 4 eine Messstange so einstecken, dass beim Visiren 4, 2, 1 in einerlei Richtung erscheinen, alsdann richte man, mit der dritten Messstange zwischen 1 und 2 tretend, diese dritte so ein, dass auch 3, 2, 4 in einerlei Richtung erscheinen. Ist dies der Fall, so haben die beiden graden Linien $\overline{421}$ und $\overline{324}$ zwei Puncte, 2 und 4, gemein, und bilden mithin eine einzige grade Linie. (§. 8.) *)

Anmerkung. Zwei Personen brauchen hiezu weniger Zeit. Die eine (4) tritt dann in die Verlängerung von $\overline{12}$ und lässt, auf gegebene Winke, den Gehülfen die dritte Messstange mit ausgestrecktem Arm, so lange hin und her rücken, bis sie die Stäbe 1, 3, 2 in einerlei Richtung erblickt, worauf dann der Gehülfe, nach erhaltenem Wink, die dritte Messstange fest einsteckt.

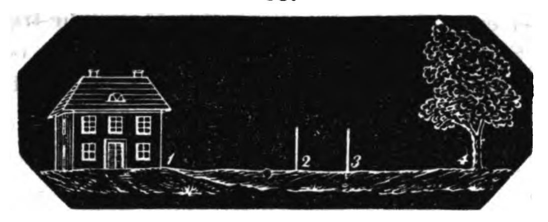
Nachdem erst drei Puncte in einer Linie durch Messstäbe bezeichnet sind, kann eine einzige Person leicht noch mehrere Zwischenpuncte durch eingesteckte Messstäbe bezeichnen.

Soll eine so ausgesteckte Linie ganz zur Anschauung gebracht werden, um darnach etwa eine Mauer, einen Damm etc. aufzuführen, so kann man von einem Punct zum andern eine Schnur spannen und längs derselben eine kleine Furche in den Boden reissen.

---

*) Anfänger mögen sich dies Verfahren practisch erläutern und sich im Visiren üben, indem sie auf einen Tisch Stecknadeln einstecken.

13.

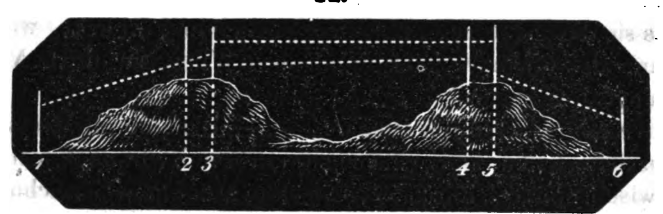


Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Puncten, 1 und 4, zwei andere Puncte durch Messstäbe zu bezeichnen, so dass alle vier in einerlei Richtung sind. Es wird hier der Fall angenommen, dass man wohl zwischen die Puncte 1 und 4, jedoch nicht hinter dieselben treten kann. *)

Auflösung. Zwei Personen (2 und 3) richten sich durch Visiren gegenseitig so ein, dass gleichzeitig 2, 3, 4 und 3, 2, 1 in grader Linie sind, welches auf gegenseitiges Zuwinken, nach einigem Hin- und Herrücken leicht bewirkt wird. Ist dies aber der Fall, so haben beide Linien $\overline{234}$ und $\overline{321}$ zwei Puncte, 2 und 3, gemein und folglich einerlei Richtung. (§. 8.)

Soll eine Person dies allein thun, so braucht sie nur, wegen des öftern Hintretens von einem der beiden Stäbe, 2 und 3, zum andern, mehr Zeit. Nachdem aber diese beiden Zwischenpuncte gefunden sind, können leicht noch mehrere bezeichnet werden.

14.



Aufgabe. Von 1 nach 6 soll über zwei Berge eine Bahn, Chaussee etc. geführt, oder dieselbe nach grader Richtung

---

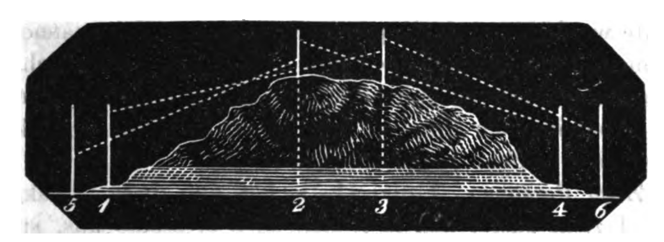
*) Der Anfänger möge zum bessern Verständniss dieser Aufgabe einen Tisch mitten in's Zimmer stellen und auf diesen zwei Stecknadeln (2) und (3) so einzustecken suchen, dass sie mit den beiden gegenüber liegenden Kanten (1) und (4) des Zimmers in einerlei Richtung sind.

durchgegraben und deshalb, um den Arbeitern Richtpuncte zu geben, diese Richtung ausgesteckt werden. Es wird angenommen, dass man von jedem Berge aus nur das zunächst stehende Signal sehen kann.

Auflösung. Auf jeden Berg treten zwei Personen und richten sich, wie in vorhergehender Aufgabe, durch Visiren so ein, dass zu gleicher Zeit, $\overline{123}$, $\overline{234}$, $\overline{345}$, $\overline{456}$, grade Linien sind. Ist dies der Fall und denkt man sich diese vier Linien an den verlängerten Stäben heruntergleitend, so müssen sie nothwendig alle (weil dann jede folgende Linie mit der vorhergehenden zwei Puncte gemein bekommt) auf die durch 1 und 6 gehende grade Linie fallen und mithin die über beide Berge gehende grade Richtung oder den Durchschnitt bezeichnen. Mehre Zwischenpuncte sind nun leicht aufzufinden



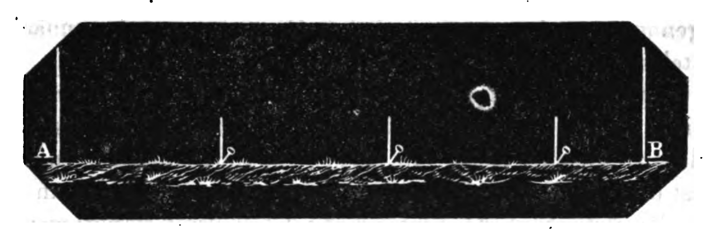
15.



Aufgabe. Es soll von 1 nach 4 ein unterirdischer Gang (Tunnel) unter einem Berge hindurch geführt werden und die Arbeit an beiden Enden (Eingang und Ausgang) zugleich beginnen. Was ist zu thun, damit die Minirer in einerlei Richtung arbeiten und auf einander stossen?

Auflösung Auf dem Berge werden erst zwei Stäbe, 2 und 3, mit 1 und 4 in einerlei Richtung eingesteckt (nach §. 13); alsdann noch 5 und 6 in dieselbe Richtung gebracht, so dass erst 1, 2, 3 und 2, 3, 4, dann 5, 1, 2 und 6, 4, 3 in einerlei Richtung sind, dann haben die beiden Linien $\overline{5123}$ und $\overline{2346}$ zwei Puncte gemein und das Verlangte wird zu Stande gebracht, wenn die Arbeit nach den durch 1, 5 und 4, 6 bestimmten Richtungen ausgeführt wird. Auf ähnliche Weise liesse sich auch ein Tunnel unter einem Flusse hindurch führen. Es wäre allerdings noch möglich, dass die beiden Linien $\overline{51}$ und $\overline{64}$ über und unter einander weggingen, wie sich aber auch dies leicht vermeiden lässt, lehrt später §. 213.

16.



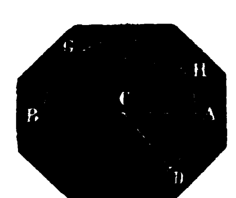
Aufgabe. Eine auf ebenem Felde ausgesteckte Linie AB auszumessen.

Verfahren. Zu solchen unmittelbaren Längenmessungen gebraucht man eine 50 Fuss lange Messkette, welche aus eisernen, einen halben Fuss langen Gliedern, von der Dicke eines Gänsekiels besteht, und von 10 zu 10 Fuss durch messingne Ringe abgetheilt ist. Durch die grössern Endringe der Kette werden, um sie bequemer fortziehen und anspannen zu können, 3 bis 4 Fuss lange Stäbe gesteckt, welche gleich den Messstangen eiserne Spitzen haben. Ein paar Stifte verhüten das Abgleiten der Ringe. Zum blossen Privatgebrauch kann auch eine hanfene Schnur dienen.

Zwei Personen, I und II, ziehen nun diese Messkette. No. I zieht zuerst den in *A* stehenden Messstab aus, steckt an dessen Stelle ihren Kettenstab und richtet darauf durch Winke No. II, welche die Kette straff anzieht, so ein, dass die beiden Kettenstäbe und die in *B* stehende Messstange in einerlei Richtung sind. Hierauf ziehen beide Kettenzieher die Kettenstäbe wieder aus, No. I richtet die Messstange in *A* wieder auf, No. II bezeichnet die Stelle, wo ihr Kettenstab stand, mit einem kleinen Merkzeichen (Sticken, deren sie ein Dutzend in einem Köcher mit sich führt) und geht nun, die Kette nach sich schleppend, vorwärts, bis die ihr folgende No. I an die bezeichnete Stelle kommt, und an die Stelle des Merkzeichens ihren Kettenstab steckt. Nach diesem Kettenstabe und nach der in *A* wieder aufgerichteten Messstange kann No. II sich jetzt selbst einrichten. Diese zweite Stelle wird wieder mit einem Merkzeichen bezeichnet u. s. w. — So viele Merkzeichen No. I einsammelt, so viele ganze Kettenlängen hält die ausgemessene Linie. Ein übrig bleibendes Stück wird mit einem Theile der Kette ausgemessen.

Eine nicht zu grosse Länge kann auch mit einem sogenannten Zehnfussstock ausgemessen werden. In sehr vielen Fällen genügt es auch, zu manchen militärischen Zwecken z. B., eine Länge durch Abschreiten oder durch blosse Schätzung nach dem Augenmass zu messen, wozu dann aber eine grosse Uebung erforderlich ist. Um sich im Zählen der Schritte nicht zu irren, kann man sich eines Schrittzählers (in Form einer Taschenuhr) bedienen. Die Längen krummer Linien und Wege werden oft auch mit einem eigenen, sich den Krümmungen anschliessenden Wegemesser gemessen, d. i. ein Rad von 6 bis 8 Fuss im Umfange. Stand der Nullpunct o unten und ist das Rad auf der krummen Linie so weit fortgeschoben, bis der Nullpunct wiederum unten steht, so ist offenbar die Länge dieses durchlaufenen Stücks der krummen Linie gleich dem Umfange des Rades. In der Regel befindet sich an einem solchen Wegemesser eine Art Uhr, und man kann darnach, aus der Stellung der Zeiger, die Länge des vom Rade durchlaufenen Weges unmittelbar ablesen. Jeder Uhrmacher kann an einen Wagen, dessen Achsen in ihrer Nabe nicht zu viel Spielraum haben, einen solchen etwa 8 Reichsthaler kostenden Mechanismus leicht anbringen.

17.



Erklärungen. 1) Der Kreis ist eine ebene Figur, von einer krummen Linie so begrenzt, dass alle ihre Puncte, wie A, G, $H\cdots$ von einem innerhalb liegenden Punct C, den man Mittelpunct nennt, gleich weit entfernt sind.

2) Die den Kreis begrenzende krumme Linie heisst Kreis-Linie oder auch Peripherie (Umfang) und die davon eingeschlossene Fläche, Kreisfläche. Wenn man kurzweg Kreis sagt, so ergiebt sich aus dem Sinn der Rede, ob die Kreisfläche oder die Peripherie (Kreislinie) gemeint ist.

3) Jede vom Mittelpunct C bis an die Peripherie gehende Linie, wie $\overline{CA}$, $\overline{CD}$,·· heisst Radius oder auch Halbmesser und jede durch den Mittelpunct nach beiden Seiten bis an die Peripherie gehende Linie, wie $\overline{AB}$, heisst ein Durchmesser (Diameter).

Es folgt aus dem Begriffe des Kreises, dass alle Radien desselben einander gleich und ebenso, dass alle Durchmesser einander gleich und doppelt so gross als ein Radius sind.

4) Jeder Theil der Kreislinie, wie $\overset{\frown}{GH}$, heisst ein Bogen und die, die Endpuncte desselben verbindende grade Linie, $\overline{GH}$, heisst **Sehne**.

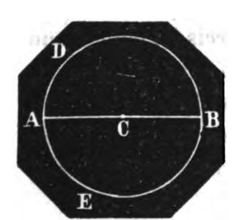
Den Kreis kann man sich entstanden denken, indem der Radius $\overline{CA}$ desselben sich um den Mittelpunct C dreht, alsdann beschreibt der Endpunct A die in sich zurücklaufende Kreislinie.

18.

Erklärung. Wenn zwei Figuren so beschaffen sind, dass, wenn man sie (in Gedanken) auf einander legt, sie genau mit einander zusammenfallen, so sagt man: sie sind **congruent**, d. h. sie decken sich, und es ist klar, dass, wenn zwei Figuren sich genau decken (congruent sind), sie dann nothwendig auch vollkommen gleich sind. Der Nachweis der Deckung (Congruenz) zweier Figuren wird häufig angewandt, um die Gleichheit derselben zu beweisen. Als Erläuterungsbeispiel möge folgender Satz dienen.



19.



Lehrsatz. Ein Kreis wird durch einen beliebig gezogenen Durchmesser AB halbirt, d. h. in zwei gleiche Hälften getheilt.

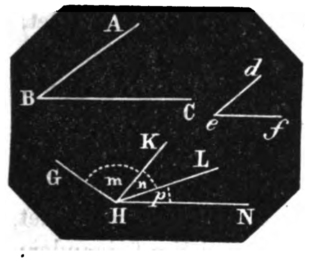
Beweis. Man denke sich den obern Theil ADB aus der Bildebene herausgeschnitten, und (indem man ihn um den Durchmesser AB, wie um eine Achse gedreht denkt) auf den untern Theil AEB gelegt, so müssen, weil dem Begriffe des Kreises zufolge, alle Puncte der Peripherie gleich weit vom Mittelpunct C entfernt sind, nothwendig auch alle Puncte des obern Bogens $\overset{\frown}{ADB}$ auf den untern $\overset{\frown}{AEB}$ fallen, folglich decken sich beide Theile, sind also gleich und jeder die Hälfte des Ganzen.

Zweites Buch.

Von den Winkeln.

20.

Erklärung. Wenn von einem Puncte zwei grade Linien nach verschiedenen Richtungen ausgehen, so sagt man: sie seien gegen einander geneigt und bilden einen Winkel (Ecke) mit einander, und man versteht daher unter Winkel immer die Neigung zweier graden Linien gegen einander. Die beiden, einen Winkel bildenden Linien, wie $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, heissen die Schenkel und der Punct B, in welchem sie zusammenstossen, der Scheitel des Winkels.



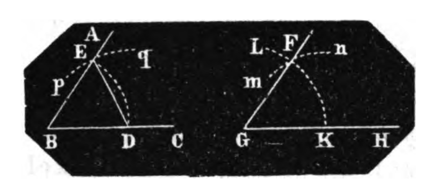
Einen Winkel nennt und bezeichnet man, entweder bloss durch den am Scheitel stehenden Buchstaben, oder, wenn mehrere an einerlei Scheitel liegen und dadurch Verwechselung entstehen könnte, durch einen in die Oeffnung der Schenkel gesetzten Buchstaben, oder auch noch, jedoch selten, durch drei Buchstaben, indem man den am Scheitel stehenden zwischen die an den Schenkeln stehenden schreibt. Ueber jede dieser Bezeichnungen pflegt man (nach Carnot) manchmal noch eine gebrochene Linie als Winkelzeichen zu legen. So bedeutet z. B. B, $\hat{B}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBA}$ den Winkel bei B, ebenso: n, KHL, LHK den Winkel, den die beiden Linien $\overline{HK}$ und $\overline{HL}$ bilden.

Die Grösse eines Winkels hängt allein von der Neigung (Oeffnung) seiner Schenkel ab, die Länge der Schenkel ist ganz gleichgültig. Denkt man den Winkel e so auf $\hat{B}$ gelegt, dass der Scheitel e auf B, der Schenkel ef in die Richtung BC kommt, und es fällt dann der Schenkel ed auf BA, so sind die Winkel B und e gleich gross, obgleich ihre Schenkel verschiedene Länge haben.

Einen Winkel kann man sich durch Bewegung entstanden denken. Der Schenkel $\overline{BA}$ z. B. habe anfangs auf dem Schenkel

BC gelegen, sich dann um den Scheitel *B* gedreht, so entsteht sogleich ein Winkel, der mit fortgesetzter Drehung immer grösser wird.

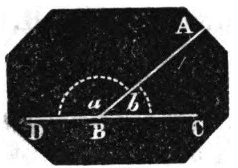
21.



Aufgabe. An die Linie *GH* im Puncte *G* einen Winkel zu tragen, der einem gegebenen Winkel *B* gleich ist.

Auflösung. Aus dem Scheitel *B* des gegebenen Winkels beschreibe man zwischen den Schenkeln desselben, mit einem beliebigen Radius *BD* einen Bogen $\widehat{DE}$, und mit demselben Radius *BD* aus dem neuen Scheitel *G* einen Bogen *KL*, denke die Sehne *DE* gezogen und beschreibe mit derselben als Radius aus *K* einen Bogen *mn*, der den Bogen *KL* in einem Puncte *F* schneidet, und ziehe dann nur die Linie *GF*, so ist der Winkel *G* = Winkel *B*. Denn denkt man sich die Winkel gehörig auf einander gelegt, so fallen die mit demselben Radius *BD* beschriebenen Bögen $\widehat{DE}$, $\widehat{KL}$ und ebenso die mit demselben Radius *DE* beschriebenen Bögen $\widehat{pq}$, $\widehat{mn}$ und, wie leicht einzusehen (wenn man die Bögen zu ganzen Kreisen vollendet denkt), auch deren Durchschnittspuncte *E* und *F* auf einander; die Winkel decken sich also und sind folglich gleich, $\widehat{G} = \widehat{B}$.

22.



Erklärung. Zwei Winkel, welche einen Schenkel gemein haben und deren beiden andern Schenkel eine grade Linie bilden, heissen Nebenwinkel.

Von zwei Nebenwinkeln, *a* und *b*, kann man sich den einen entstanden denken, indem man den Schenkel des andern rückwärts verlängert. Anfänger müssen sich den Begriff Nebenwinkel genau merken. Bei zwei bloss an einander liegenden Winkeln, wie *m* und *n* in §. 20, die auch einen Schenkel *HK* gemein haben, bilden die beiden äussern Schenkel *HG*, *HL* keine grade Linie, wie es bei Nebenwinkeln sein muss.

23.

Erklärung. Wenn eine Linie AB gegen eine andere DC eine solche Lage hat, dass die Nebenwinkel einander gleich sind, $(\widehat{a} = \widehat{b})$, so sagt man, die Linien stehen perpendikulär auf einander und nennt die Winkel, welche zwei solche Linien mit einander machen, rechte Winkel. Mit andern Worten: ein rechter Winkel ist ein solcher, der seinem Nebenwinkel gleich ist, und zwei Linien, die einen rechten Winkel bilden, stehen perpendikulär auf einander.

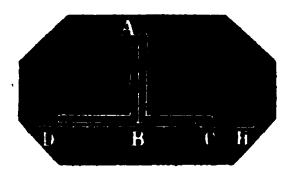
Es folgt aus diesem Begriff sogleich, dass in einem Punct B der Linie DC nur ein Perpendikel AB möglich ist, und dass daher alle rechte Winkel nothwendig gleich sind (sich decken müssen). Der rechte Winkel wird oft mit dem Buchstaben R bezeichnet. Alle Winkel, kleiner als ein rechter, heissen spitz, und alle, welche grösser sind, stumpf.

Zwei Linien, die einen spitzen oder stumpfen Winkel bilden, heissen schräg gegen einander.

Statt perpendikulär sagt man oft auch: senkrecht, lothrecht, normal. *)

Man breche ein Stück Papier und dann nochmals, so dass das eine Ende des ersten Bruches auf das andere fällt, so hat man einen rechten Winkel und zwei auf einander senkrechte Linien.

24.



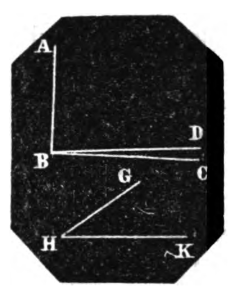
Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Schenkel eines sogenannten Winkelhakens (oder Dreiecks), dessen man sich bedient, um rechte Winkel zu zeichnen und Perpendikel zu ziehen, auch genau rechtwinklig auf einander stehen.

---

*) Ein einziges Wort, und zwar schicklicher rechtwinklig oder normal, wäre zur Bestimmung dieses Begriffs vollkommen genügend. Ueberflüssige und noch dazu unpassend gewählte Kunstwörter erschweren das Studium einer Wissenschaft. Um die Begriffe nicht mit einander zu verwechseln, nennt man diejenige Richtung im Raume, welche ein freihängendes Loth oder Senkblei angiebt, nicht lothrecht oder senkrecht, sondern vertical. (§. 11, Anmerkung.)

Auflösung. Man ziehe eine grade Linie DH, lege an dieselbe den einen Schenkel BC des Winkelhakens und ziehe längs des andern AB eine grade Linie. Wäre nun der Winkel ABC genau ein rechter, so müsste er seinem Nebenwinkel ABD gleich sein; ob er dies ist würde sich gleich zeigen, indem man den Winkelhaken nur hineinpasst.

25.



Winkelmass. So wie man, um Linien zu messen, verschiedene Längen-Einheiten (Fuss, Zoll, Linien) gebraucht, so ist man auch, um Winkel zu messen, über folgende drei Winkel-Einheiten übereingekommen.

Man denkt sich den rechten Winkel in 90 kleinere gleiche Winkel getheilt, welche man Grade (°) nennt. Sei $\widehat{DBC}$ ein solcher, deren neunzig an einander liegend den rechten Winkel ABC genau ausfüllen, nämlich $\widehat{DBC} = 1^\circ$, so ist dieser Winkel die grösste Winkel-Einheit. Diese denkt man ferner in 60 gleiche (ihrer Kleinheit wegen aber auf dem Papier nicht darstellbare) Winkel getheilt, welche man Minuten (′) nennt, so dass also 1 Grad = 60 Minuten, in Zeichen $1^\circ = 60'$. Den Winkel von einer Minute denkt man sich wiederum in 60 gleiche Winkel getheilt, welche Secunden (″) heissen, so dass also $1' = 60''$. Hiernach ist also der rechte Winkel nämlich:

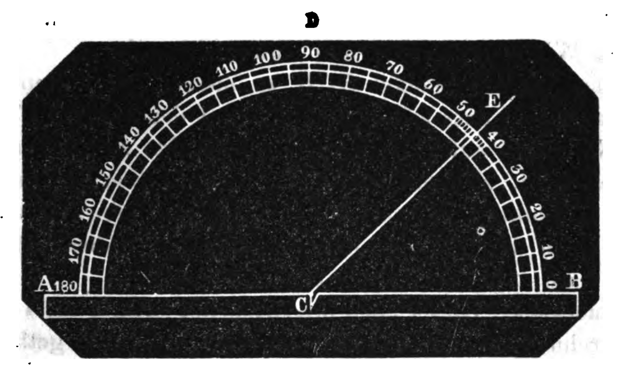
$$R = 90^\circ = 5400' = 324000''.$$

Es genügt hier, sich diese weit gehende Theilung des rechten Winkels nur in Gedanken vorzustellen. Gehörigen Orts kann man sich überzeugen, dass es einem geschickten Mechanikus mittelst einer Theilmaschine und einer künstlichen Vorrichtung (Mikrometer, Nonius) möglich ist, diese feine Theilung zu bewirken und einen Winkelmesser herzustellen, mit dem man, bei gehöriger Handhabung desselben, die Winkel bis auf die Secunde genau messen kann.

Gesetzt nun, es sei in dem Winkel H die erste Einheit, nämlich 1 Grad, 36 ganze mal, in dem überschüssigen Theil die zweite Winkel-Einheit, nämlich 1 Minute, 40 ganze mal, und in dem jetzt noch übrig bleibenden Theil des Winkels H

die dritte Einheit, nämlich eine Secunde, noch 20 mal enthalten, so betrüge die Grösse des Winkels H, 36 Grad 40 Minuten und 20 Secunden, oder kürzer, in Zeichen: $\hat{H} = 36° \; 40' \; 20''$.

26.



Winkelmesser. Der Kreis dient uns nicht allein als Hülfslinie, um Winkel zu zeichnen, sondern gehörig dazu eingerichtet, auch als Instrument, vermittelst dessen man einen Winkel messen und seine Grösse in Graden, Minuten und Secunden angeben kann.

Man denke sich den Durchmesser AB eines Kreises gezogen, wodurch derselbe halbirt ist (§. 19). Auf dem Durchmesser denke man sich im Mittelpunct C das Perpendikel DC errichtet, so theilt dieses den Halbkreis wieder in zwei gleiche Theile $\widehat{AD} = \widehat{DB}$; denn denkt man sich die beiden rechten Winkel ACD und DCB zur Deckung gebracht, so müssen sich auch die Bögen AD und DB decken, weil ihre Puncte alle gleich weit vom Mittelpunct entfernt sind. Die Bögen AD und DB sind also gleich und jeder ein Viertelkreis (Quadrant). Denkt man sich nun jeden der beiden rechten Winkel in 90 gleiche Winkel (Winkelgrade) getheilt, so würden die Theilungslinien offenbar auch jeden der beiden Viertelkreise in 90, mithin den Halbkreis in 180 gleiche Bögen (Bogengrade) theilen (§. 18). Würde nun umgekehrt der Halbkreis erst in 180 gleiche Bögen getheilt (welches einem geschickten Mechanikus mittelst einer Theilmaschine desto leichter sein muss, je grösser der Halbkreis ist, weil dann die Theilpuncte weiter aus einander liegen und deutlicher hervor-

treten) und dann von diesen Theilpuncten nach dem Mittelpuncte C grade Linien gezogen, so wären dadurch 180 an einander liegende gleiche Winkel-Grade versinnlicht.

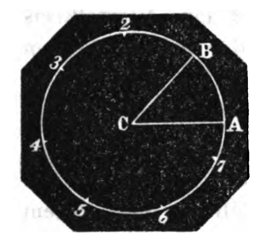
In manchem Besteck findet sich ein solcher eingetheilter messingner Halbkreis, oder vielmehr nur dessen ausgeschnittener Rand, wo man sich dann die Theilstriche bis zum Mittelpunct verlängert denkt. Der Gebrauch eines solchen Winkelmessers ist nun einfach folgender:

Um z. B. den Winkel ECB zu messen, lege man das Instrument so: dass sein Mittelpunct auf den Scheitel C und sein Nullpunct auf einen Schenkel CB des zu messenden Winkels fällt, alsdann sehe man zu, wie viele Grade der andere Schenkel CE abschneidet, indem man halbe bis viertel Grade nach dem Augenmass schätzt. Nach Andeutung der Figur wäre z. B. Winkel $ECB = 43° 50'$.

Anmerkung. Dieser eben beschriebene, etwa 3 bis 4 Zoll im Durchmesser haltende und nur bis auf Grade getheilte Winkelmesser wird nur gebraucht, um Winkel in Zeichnungen oder Rissen zu messen und aufzutragen und gewährt für solche Zwecke eine hinreichende Genauigkeit. Die §. 25 erwähnten, besonders für die Geodäsie und Astronomie erforderlichen feineren Winkelmesser sind ganze Kreise von 10 Zoll bis 3 Fuss und darüber im Durchmesser mit einem um den Mittelpunct drehbaren Fernrohr. Die Theilstriche sind hier so fein, dass man sie nur mit einem Vergrösserungsglase deutlich sehen und ablesen kann. Nach den hohen Preisen derselben, von 100 bis zu 3000 Thaler und darüber, kann man muthmassen, welche Geduld und Geschicklichkeit die Verfertigung solcher Instrumente erfordert.



27.

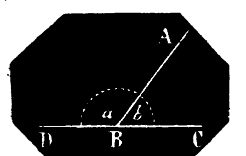


Aufgabe. Die Anzahl Grade und Minuten, welche ein beliebig gegebener Winkel C enthält, bloss mit Hülfe eines Zirkels und wenigstens eben so genau zu bestimmen, als es mit den gewöhnlichen Winkelmessern möglich ist.

Auflösung. Mit einem möglichst grossen Radius CA beschreibe man zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels C einen Bogen AB, den man zu einem

ganzen Kreise vollendet. Hierauf untersuche man, wie oft der Bogen AB (indem man dessen Sehne $\overline{AB}$ in den Zirkel nimmt) in der ganzen Peripherie enthalten ist, und dividire mit der gefundenen Zahl in 360°. Wäre z. B. $\widehat{AB}$ $7\frac{1}{2}$ mal in der ganzen Peripherie enthalten, so wäre $C = \frac{360°}{7\frac{1}{2}} = 48°$.

28.



Lehrsatz. Zwei Nebenwinkel betragen zusammen zwei rechte Winkel. In Zeichen:

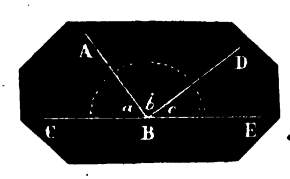
$$a + b = 2\,R = 180°.$$

Beweis. Denkt man sich aus dem gemeinschaftlichen Scheitel B einen in 180° getheilten Halbkreis beschrieben, oder den Winkelmesser angelegt, so ist klar, dass die beiden Nebenwinkel a und b ihn ganz ausfüllen und dass der eine Nebenwinkel a gerade so viel über 90° hat, als dem andern b daran fehlen. Dasselbe folgt auch, wenn man in B ein Perpendikel auf DC errichtet denkt.

Aufgabe. Es sei der Winkel b = 52° 37′ 49″. Wie gross ist der Winkel a?

Antwort. Es ist $\widehat{a}$ = 127° 22′ 11″.

29.



Lehrsatz. Alle Winkel, welche an einerlei Seite einer graden Linie liegen und einen Scheitel in derselben gemein haben, betragen zusammen zwei rechte Winkel. In Zeichen:

$$a + b + c = 2\,R = 180°.$$

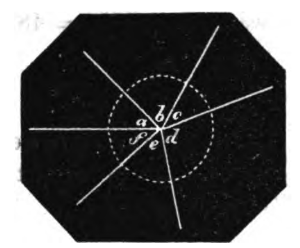
Beweis. Man denke sich wieder im gemeinschaftlichen Scheitel B ein Perpendikel auf CE errichtet (oder den Winkelmesser angelegt), so werden die entstehenden beiden rechten Winkel durch die andern ganz ausgefüllt; letztere haben also zusammen eben so viele Grade, als zwei rechte Winkel.

Aufgabe 1. Es sei $\widehat{a}$ = 50° 16′ 20″; $\widehat{c}$ = 30° 10′ 10″; wie gross ist $\widehat{b}$?

Aufgabe 2. Es sei $\widehat{a} = 72° \; 50' \; 6''$; $\widehat{b} = 86° \; 21' \; 18''$; wie viel mal ist $\widehat{a}$ grösser als $\widehat{c}$?

Antwort. 1) $\widehat{b} = 99° \; 33' \; 30''$; 2) $3\frac{1}{2}$ mal.

30.



Lehrsatz. Alle Winkel, welche rings um einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct liegen, betragen zusammen immer vier Rechte. In Zeichen:

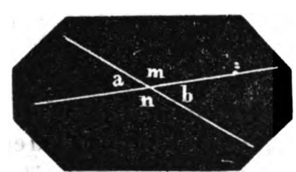
$$a + b + c + d + e + f = 4R = 360°.$$

Beweis. Man denke sich durch den gemeinschaftlichen Scheitel eine grade Linie gezogen, so betragen die Winkel an jeder Seite derselben $2\,R$, mithin an beiden Seiten zusammen $4\,R$. Die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich auch, indem man den Mittelpunct eines in 360° getheilten Kreises auf den gemeinschaftlichen Scheitel gelegt denkt.

Aufgabe. Es sei $a = 50° \; 25' \; 2''$, $b = 68° \; 0' \; 12''$, $= 29° \; 40' \; 48''$, $d = 120° \; 57' \; 0''$, $e = 60° \; 9' \; 54''$; wie gross ist der Winkel f?

Antwort. Es ist $f = 30° \; 47' \; 4''$.

31.



Lehrsatz. Wenn zwei grade Linien sich schneiden, so sind je zwei gegenüber liegende Winkel, welche man Scheitelwinkel nennt, einander gleich.

In Zeichen:

$$a = b$$
$$m = n.$$

Beweis. Die Winkel a und m sind zwei Nebenwinkel und betragen zusammen zwei Rechte (§. 28); eben so sind b und m zwei Nebenwinkel und betragen zusammen auch zwei rechte Winkel. Da es nun einerlei ist, ob man a oder b zu m legt, indem in beiden Fällen die Summe gleich zweien Rechten ist, so ist nothwendig auch $a = b$. Eben so ist es einerlei, ob man m oder n zu a addirt, mithin auch der Winkel m seinem Scheitelwinkel n gleich. Wäre z. B. $\widehat{a} = 60°$, so wäre jeder seiner Nebenwinkel m und n, $= 120°$ und $b = 60°$.

Drittes Buch.

Von der Gleichheit (Congruenz) der Dreiecke.

32.

Nachdem wir im Vorhergehenden die nöthigen Sätze über die Bestandtheile gradlinigter Figuren vorausgeschickt, können wir nun zu den aus diesen Bestandtheilen, nämlich aus Linien und Winkeln, gebildeten und geschlossenen gradlinigten Figuren, welche man im Allgemeinen Vielecke nennt, fortschreiten.

Die Vielecke werden nach der Anzahl ihrer Ecken (Winkel) benannt und heissen: Dreieck, wenn es drei, Viereck, wenn es vier Ecken hat etc. Dass jedes Vieleck nothwendig eben so viel Seiten als Ecken hat, ist leicht einzusehen. Das Dreieck ist offenbar das einfachste unter allen Vielecken und von diesem müssen wir ausgehen. Das einfache Dreieck ist zugleich unter allen Vielecken die wichtigste Figur. Grund ist, weil alle Vielecke in Dreiecke zerlegt werden können. Deshalb muss man auch alle Lehrsätze über das Dreieck nicht allein gut verstehen, sondern auch gut inne haben. Ueberhaupt hängt, wie man schon in den beiden vorhergehenden Büchern gemerkt haben wird, die Leichtigkeit und Gewandtheit in den Anwendungen der Geometrie und rasches Fortschreiten in derselben von der leichten und schnellen Erinnerung ihrer Lehrsätze ab.

33.

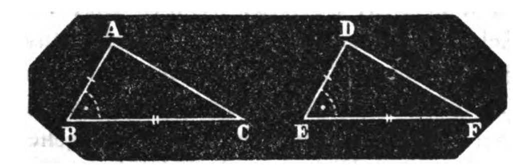
Erklärungen. Ein Dreieck wird oftmals nach den besondern Merkmalen benannt, welche es durch das Verhältniss und die Lage seiner Seiten erhält. Es heisst nämlich:

1) **ungleichseitig**, wenn alle drei Seiten ungleich sind;
2) **gleichseitig**, wenn alle Seiten gleich sind;
3) **gleichschenklig**, wenn es nur zwei gleiche Seiten hat. Diese heissen dann die **Schenkel** und die dritte Seite **Grundlinie**;
3) **spitzwinklig**, wenn alle drei Winkel spitz sind;
5) **stumpfwinklig**, wenn es einen stumpfen Winkel hat;
6) **rechtwinklig**, wenn es einen rechten Winkel hat. Im rechtwinkligen Dreieck heissen die beiden rechtwinklig auf einander stehenden Seiten die **Catheten** (Senkrechte) und die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite **Hypotenuse** (Schräge).

Unter den sechs Bestandtheilen eines jeden Dreiecks (drei Seiten und drei Winkel) giebt es verschiedene, jedoch nicht beliebige drei Stücke, durch deren Grösse das ganze Dreieck, also auch die übrigen drei Stücke vollkommen bestimmt sind. Diese drei Bestimmungsstücke, welche man sich ganz besonders merken muss, werden nun die folgenden §§ kennen lehren.



34.



Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind gleich (congruent), wenn sie zwei Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich haben.

Beweis. Angenommen, es seien für die beiden Dreiecke ABC und DEF die im Lehrsatz erwähnten drei gleichen Stücke beziehlich folgende: Die Seite BC im ersten Dreieck sei $=$ der Seite EF im andern Dreieck, ferner Seite $AB =$ Seite DE und der von den beiden Seiten AB, BC eingeschlossene Winkel B gleich dem von den beiden Seiten DE, EF gebildeten Winkel E.

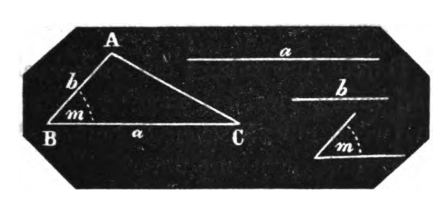
Man denke sich nun das eine Dreieck DEF aus der Bildebene herausgenommen und übereinstimmend, nämlich so auf das andere Dreieck ABC gelegt, dass die gleich gross vorausgesetzten Winkel B und E mit ihren ebenfalls gleich

gross vorausgesetzten Schenkeln sich decken, so dass also E auf B, F auf C und D auf A fällt. Nothwendig muss dann auch (§. 3) die Seite DF die Seite AC, Winkel D den Winkel A, und Winkel F den Winkel C decken und folglich auch, wie der Lehrsatz behauptet, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ sein. (§. 18.) Das Zeichen $\triangle$ heisst Dreieck und $\cong$ bedeutet: deckend oder vollkommen gleich (§. 18).

Anmerkung. In gleichen Dreiecken liegen gleiche Winkel gleichen Seiten und umgekehrt, gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber. Hiernach findet man aus Dreiecken, die vollkommen gleich sind, auch leicht die beziehlich gleichen Stücke heraus.



35.



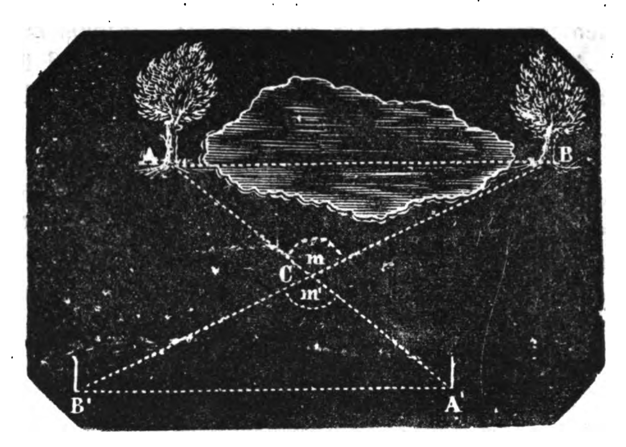
Aufgabe. Es sind zwei Seiten a und b eines Dreiecks und der davon eingeschlossene Winkel m gegeben. Es soll das dadurch bestimmte Dreieck construirt werden.

Auflösung. Man nehme eine der beiden gegebenen Seiten (a) in den Zirkel und stecke sie in BC ab, trage an das eine Ende B dieser Linie den gegebenen Winkel m (§. 21), mache den andern Schenkel BA so lang, als die andere Linie b ist und ziehe dann die Linie AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Anmerkung. Hätte man auch den gegebenen Winkel m statt in B, in C, oberhalb oder unterhalb BC angetragen, so würde man doch immer dasselbe Dreieck, nur in anderer Lage erhalten haben. Anfänger werden wohl thun, diese beiden Constructionen noch zu machen.

Statt also zu sagen: zwei (alle) Dreiecke sind gleich (congruent), wenn sie zwei Seiten und den zwischen liegenden Winkel gleich haben, hätte man auch sagen können: ein **Dreieck ist bestimmt durch zwei Seiten und den zwischen** liegenden Winkel. Die im Lehrsatz beibehaltene alte Redeform ist aber für den ersten Unterricht besser.

36.



Aufgabe. Durch Anwendung des vorhergehenden Lehrsatzes die Entfernung zweier Puncte A, B auf dem Felde zu bestimmen, wenn ein zwischen liegendes Hinderniss die unmittelbare Messung nicht erlaubt.

Auflösung. Man bezeichne durch einen Messstab noch einen dritten Punct C, von dem man ungehindert mit der Kette nach A und B messen kann. Messe die Linien AC und BC und trage ihre Längen gradlinigt nach A' und B' fort, so dass $A'C = AC$ und $B'C = BC$ wird; messe hierauf nur die Linie $\overline{A'B'}$, so giebt diese die gesuchte Länge von $\overline{AB}$. Wäre z. B $\overline{A'B'} = 1200$ Fuss gemessen, so wäre auch $\overline{AB} = 1200$ Fuss.

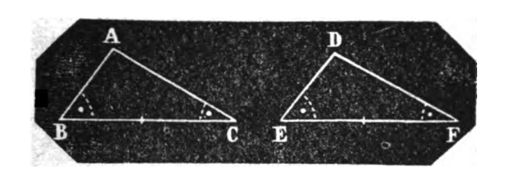
Beweis. Die beiden Dreiecke $A'B'C$ und ABC sind gleich, weil sie zufolge Construction zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, nämlich: $A'C = AC$, $B'C = BC$ (gleich gemacht) und $m' = m$ (als Scheitelwinkel, §. 31). Stellt man sich vor, das untere Dreieck drehe sich um den Punct C herum, bis A' auf A fällt, so muss dann B' auf B, mithin $A'B'$ auf AB fallen.

37.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind gleich (congruent), wenn sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben.

In Zeichen:

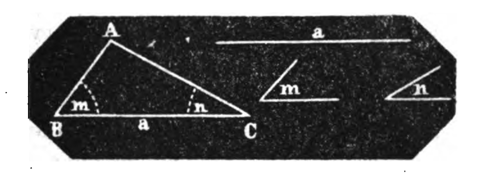
Sei	so ist:	
$\overline{BC} = \overline{EF}$	$\overline{AB} = \overline{DE}$	
$\hat{B} = \hat{E}$	$\overline{AC} = \overline{DF}$	$\triangle\, ABC \cong \triangle\, DEF.$
$\hat{C} = \hat{F}$	$\hat{A} = \hat{D}$	



Beweis. Man denke sich das eine Dreieck DEF so auf das andere ABC gelegt, dass die als gleich vorausgesetzten Seiten und Winkel sich decken, also erstlich EF auf $\overline{BC}$ fällt, alsdann muss, weil $\hat{E} = \hat{B}$ und $\hat{F} = \hat{C}$, der Punct D nothwendig sowohl in die Richtung $\overline{BA}$, als in die Richtung $\overline{CA}$ fallen. Soll aber ein Punct D (der keine Ausdehnung hat) in zwei verschiedene Richtungen $\overline{BA}$, $\overline{CA}$ zugleich fallen, so liegt er nothwendig in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct A. Die Dreiecke decken sich also und es ist, wie im Lehrsatz behauptet, $\triangle\, ABC \cong \triangle\, DEF$.



38.

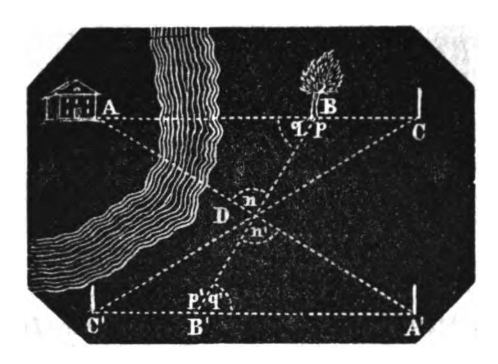


Aufgabe. Es ist eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel m und n gegeben; es soll das durch diese drei Stücke bestimmte Dreieck construirt werden.

Auflösung. Man stecke die Linie a in $\overline{BC}$ ab, trage daran in B den Winkel m, in C den Winkel n, und verlängere die Schenkel dieser angetragenen Winkel bis zu ihrem Durchschnittspunct A, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Anmerkung. Hätte man $\hat{n}$ bei B und $\hat{m}$ bei C oder beide Winkel unterhalb BC angetragen, so hätte man doch dasselbe Dreieck, nur in anderer Lage, erhalten.

39.

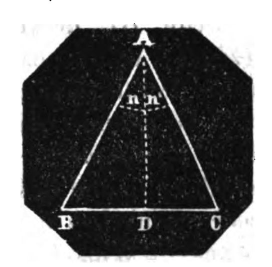


Aufgabe. Mittelst des vorhergehenden Lehrsatzes die Entfernung zweier Puncte A und B zu bestimmen, wenn nur der eine Punct B zugänglich ist.

Auflösung. Man stecke erst in C einen Messstab, der mit A, B in einerlei Richtung ist; dann stecke man einen Messstab in D, messe die Linien BD, CD und trage ihre Längen gradlinigt nach B' und C' hinaus, so dass $B'D = BD$, und $C'D = CD$ wird. Jetzt gehe man in der, durch die bezeichneten Puncte C', B' bestimmten Richtung rückwärts fort, bis man an einen Punct A' kommt, der zugleich auch mit A, D in einerlei Richtung liegt, messe dann nur die Linie $A'B'$, so giebt diese die gesuchte Entfernung von A bis B.

Beweis. Um zu zeigen, dass zufolge der Construction nothwendig $AB = A'B'$ sein muss, bemerke man zuerst, dass $\triangle\ B'C'D \cong \triangle\ BCD$ (§. 34) und dass hieraus die Gleichheit der Winkel p und p' folgt (§. 34, Anmerkung). Ferner sind nun auch die Dreiecke ABD und $A'B'D$ gleich, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich: $BD = B'D$ (gleich gemacht) $\widehat{n} = \widehat{n'}$ (als Scheitelwinkel, §. 31) und $\widehat{q} = \widehat{q'}$ (als Nebenwinkel von $\widehat{p}$ und $\widehat{p'}$); denn wenn zwei Winkel p und p' gleich sind, so müssen auch ihre Nebenwinkel q und q' gleich sein (§. 28). Daher $\triangle\ ABD \cong \triangle\ A'B'D$ (§. 37) und hieraus: $AB = A'B'$ (§. 34, Anmerkung).

40.



Lehrsatz. In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

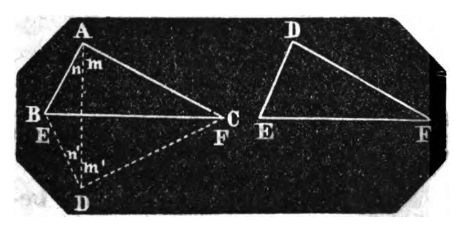
In Zeichen:

Wenn:	so ist auch:
$AB = AC$	$\hat{B} = \hat{C}$.

Beweis. Man kann sich den Winkel BAC an der Spitze durch die Linie AD halbirt denken, so dass $\hat{n} = \hat{n'}$; alsdann würden aber die beiden Dreiecke ABD und ACD gleich sein, wegen zwei beziehlich gleicher Seiten und des zwischen liegenden gleichen Winkels, nämlich: $AB = AC$, nach Voraussetzung; $\hat{n} = \hat{n'} = \frac{1}{2}\,\widehat{BAC}$ und $AD = AD$; folglich (§. 34) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ und hieraus (§. 34, Anmerkung) $\hat{B} = \hat{C}$.

Zusatz. Sind umgekehrt in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, $\hat{B} = \hat{C}$, so sind nothwendig auch die ihnen gegenüber liegenden Seiten gleich, $AB = AC$, und das Dreieck ist ein gleichschenkliges. Denn dächte man sich in der Mitte D ein Perpendikel auf BC errichtet, so müssen nach §. 37 zwei gleiche Dreiecke entstehen, mithin die beiden andern Seiten dies Perpendikel in einem gemeinschaftlichen Punct A schneiden, und folglich $AB = AC$ sein.

41.



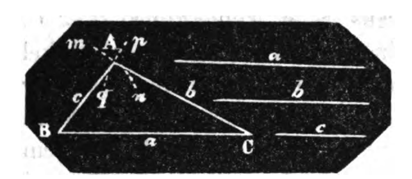
Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind gleich (congruent), wenn sie alle drei Seiten beziehlich gleich haben.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:	Daher:
$AB = DE$	$\hat{A} = \hat{D}$	
$AC = DF$	$\hat{B} = \hat{E}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
$BC = EF$	$\hat{C} = \hat{F}$	

Beweis. Man denke sich das eine Dreieck DEF in umgekehrter Lage so an das andere Dreieck ABC gelegt, dass Seite EF die als gleich vorausgesetzte Seite BC deckt. Denkt man sich nun die Linie AD gezogen, so ist das Dreieck ABD gleichschenklig, weil nach Voraussetzung $AB = DE$ und daher die Winkel an der Grundlinie AD einander gleich, nämlich $\widehat{n} = \widehat{n'}$ (§. 40). Aus demselben Grunde ist auch das Dreieck ACD gleichschenklig und deshalb auch $\widehat{m} = \widehat{m'}$. Die Summe der beiden Winkel m und n ist also gleich der Summe der beiden andern Winkel m' und n', also ist auch $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$. Das Uebrige folgt nun aus §. 34, weil beide Dreiecke jetzt zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel beziehlich gleich haben.

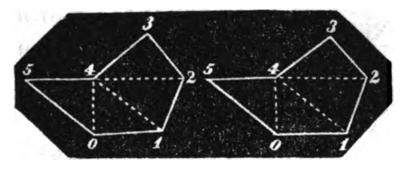
42.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten a, b, c eines Dreiecks gegeben, es soll das dadurch bestimmte Dreieck gezeichnet werden.

Auflösung. Man stecke eine der gegebenen Seiten, z. B. a in BC ab, beschreibe aus dem einen Endpunct B mit der Seite c, als Radius, einen Bogen mn, ebenso aus C mit der Seite b, als Radius, einen zweiten Bogen pq, und ziehe von dem Durchschnittspunct A beider Bögen nach B und C, so ist ABC das verlangte Dreieck. Vergleiche §. 35, Anmerkung.

43.



Aufgabe. Eine Figur abzuzeichnen.

Auflösung. Man bezeichne die Winkelpuncte nach einerlei Folge herum mit Ziffern, theile die Figur durch Diagonalen (d. h. solche Linien, welche irgend zwei nicht auf einander folgende Puncte der Figur verbinden) in lauter Dreiecke und zeichne dann diese an einander hängenden Dreiecke ab.

Anmerkung. Die erwähnten Diagonalen brauchen nicht wirklich gezogen, sondern nur gedacht zu werden.

Genauer wird die Copie, wenn man mit einer und derselben Grundlinie oder Diagonale alle übrigen Puncte des Originals zu Dreieckspuncten verbunden denkt.

Sind krumme Linien abzuzeichnen, so kann man die Lage der wichtigsten Puncte, je mehr, je genauer, einzeln bestimmen und sie durch freie Handzeichnung verbinden.

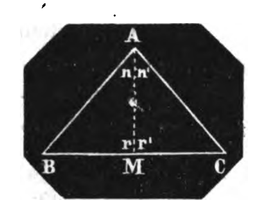
Dieses Verfahren, eine Figur abzuzeichnen, ist, obwohl theoretisch richtig, doch nur dann practisch brauchbar, wenn die Figur nur wenige und lauter grade Seiten hat.

Ausser andern Methoden, welche in der Zeichnenkunst gelehrt werden, bedient man sich auch, um Charten und Pläne abzuzeichnen, mit grossem Vortheil eines unter dem Namen Pantograph bekannten, aber sehr theuern Instruments (100 Thlr.), welches nicht mit dem sogenannten Storchschnabel zu verwechseln ist, obgleich er auf demselben Princip beruht. (Vergleiche §. 124, 3.)

Viertes Buch.

Von den Perpendikeln.

44.



Lehrsatz. Die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie gehende Linie steht senkrecht auf der Grundlinie und halbirt den Winkel an der Spitze.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
AB = AC	$\hat{r} = \hat{r'} = 90°$
und BM = MC	$\hat{n} = \hat{n'}$.

Beweis. Die beiden Dreiecke ABM und ACM sind gleich, weil sie alle drei Seiten wechselweise gleich haben; denn die Seite AM ist beiden gemein, und nach Voraussetzung ist $AB = AC$ und $BM = MC$, daher (§. 41) $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ und hieraus (§. 34, Anmerkung) $n = n'$ und $r = r'$.

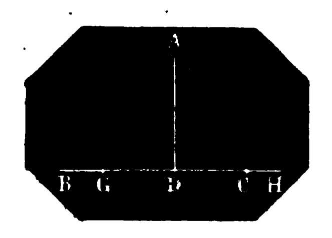
Weil nun aber die beiden gleichen Winkel r und r' zugleich auch Nebenwinkel sind, so ist jeder ein rechter Winkel und folglich AM perpendikulär auf BC. (§. 23.)

45.

Aufgabe. Auf einer Linie BH in einem bestimmten Punct D eine Senkrechte zu errichten. *)

---

*) Wer den vorhergehenden Lehrsatz gut verstanden und über die Lösung der hier gestellten Aufgabe, als eine sehr einfache Anwendung des Lehrsatzes, gehörig nachgedacht hat, wird sie ohne Anleitung finden.

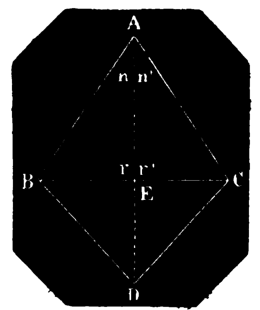


Auflösung. Man schneide von D aus erst rechts und links zwei gleiche Stücke ab, $DC = DG$. Beschreibe jetzt aus C und G mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen und verbinde deren Durchschnittspunct A mit D, so ist AD das verlangte Perpendikel.

Beweis. Denkt man noch AG und AC gezogen, so ist, zufolge Construction, AGC ein gleichschenkliges Dreieck und D die Mitte der Grundlinie, folglich (§. 44) AD auf GC senkrecht.

Zusatz. Auf gleiche Weise kann man auf dem Felde auf einer ausgesteckten Linie BC in D eine Senkrechte errichten, indem man von D aus, zu beiden Seiten gleiche Stücke $DC = DG$ abmisst, in den Puncten C und G die Enden einer Schnur (Kette) befestigt und sie dann, in der Mitte A fassend, straff anspannt, bis sie mit GC ein gleichschenkliges Dreieck bildet, dessen Spitze A dann nothwendig in der auf GC in D zu errichtenden Senkrechten liegt.

46.



Lehrsatz. Die Linie, welche durch die Spitzen zweier gleichschenkliger Dreiecke von gemeinschaftlicher Grund-Linie geht, halbirt 1) die Winkel an den Spitzen, 2) halbirt die Grund-Linie und steht 3) senkrecht auf derselben.

In Zeichen:

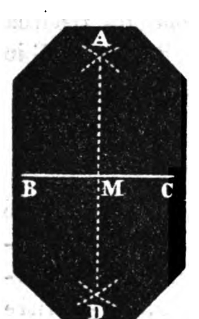
Wenn:	so ist:
$AB = AC$	1) $\hat{n} = \hat{n'} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$
$DB = DC$	2) $BE = EC$
	3) $\hat{r} = \hat{r'} = 90°$.

Beweis. Die beiden Dreiecke ABD und ACD sind gleich, weil sie alle drei Seiten wechselweise gleich haben, nämlich die Seite AD ist beiden gemein und dann, zufolge Voraussetzung, $AB = AC$ und $DB = DC$, folglich (§. 41) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ und hieraus (§. 34, Anmerkung) $\hat{n} = \hat{n'}$.

Jetzt ist es leicht zu beweisen, dass auch die Dreiecke ABE und ACE gleich sind; denn sie haben zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich, nämlich: die Seite AE ist beiden gemein; nach Voraussetzung ist $AB = AC$ und, wie eben bewiesen, ist $\widehat{n} = \widehat{n'}$, daher (§. 34) $\triangle ABE \cong \triangle ACE$, und hieraus (nach §. 34, Anmerkung) $BE = EC$ und $\widehat{r} = \widehat{r'}$. Weil aber die beiden Winkel r und r' zugleich auch Nebenwinkel sind, so ist jeder ein Rechter und folglich steht AD senkrecht auf BC. (§. 23.)

Anmerkung. Satz und Beweis bleiben dieselben, wenn die beiden gleichschenkligen Dreiecke, statt wie hier, an verschiedenen Seiten, über einerlei Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen.

47.

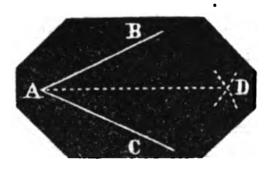


Aufgabe. Eine gegebene Linie BC zu halbiren (die Mitte zu bezeichnen).

Auflösung. Man sehe zuvor §. 45, Randanmerkung — beschreibe über BC die Spitzen A und D zweier gleichschenkliger Dreiecke, so muss die Linie, welche A und D verbindet, die gegebene Linie BC gerade in der Mitte M treffen. (§. 46.)

Zusatz. Dieselbe Construction findet Statt, wenn auf einer Linie BC in der Mitte ein Perpendikel errichtet werden soll.

48.



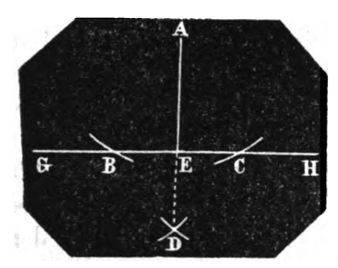
Aufgabe. Einen gegebenen Winkel A zu halbiren.

Auflösung. Siehe §. 45, Randanmerkung. Vom Scheitel A aus schneide man auf beiden Schenkeln gleiche Stücke $AB = AC$ ab. Aus B und C beschreibe man mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen, ziehe von deren Durchschnittspunct D nach A; so ist der Winkel A halbirt, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$. Der Beweis ist ganz wie in §. 46, indem man die Linien BD und CD gezogen denkt.

Durch fortgesetztes Halbiren kann man also auch einen Winkel in 4, 8, 16, 32··· gleiche Theile theilen. *)

Zusatz. Auf dieselbe Weise kann man mittelst der Messkette (Schnur) einen Winkel auf dem Felde halbiren.

49.



Aufgabe. Von einem ausserhalb einer Linie *GH* gegebenen Punct *A* eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

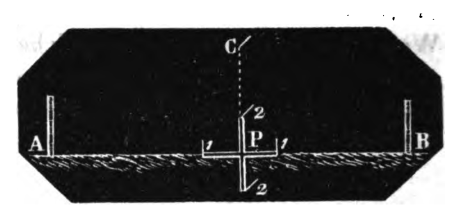
Auflösung. Mit einem Radius, der über die Linie *GH* hinausreicht, beschreibe man aus *A* einen Bogen, welcher die (nöthigenfalls verlängerte) Linie *GH* in zwei Puncten, *B* und *C*, schneidet. Aus diesen, von *A* gleich weit entfernten Puncten *B* und *C* beschreibe man dann mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen, und verbinde deren Durchschnittspunct *D* mit *A*, so ist *AE* auf *GH* senkrecht.

Beweis. Denkt man sich die Linien $AB = AC$ und $DB = DC$ gezogen, so ist der Beweis wie in §. 46.

Zusatz 1. Um auf dem Felde von einem Punct *A* auf eine nicht zu weit davon entfernte Linie *GH* ein Perpendikel zu fällen, befestige man das eine Ende einer Schnur (Kette) in *A*, ziehe sie straff an, so dass das andere Ende links und rechts an die Linie *GH* reicht, und darin zwei von *A* gleich weit entfernte Puncte *B* und *C* bezeichnen kann, halbire darauf die Linie *BC* in *E*, so liegt *E* in der verlangten Senkrechten (§. 44).

Zusatz 2. Zur Construirung der Perpendikel auf dem Felde bedient man sich bequemer eines sogenannten Winkelkreuzes, bestehend aus zwei auf einen Stab (Stativ) befestigten

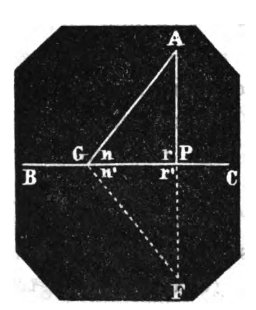
*) Obgleich die Praxis nichts dadurch verliert, so ist es doch in rein wissenschaftlicher Hinsicht sehr merkwürdig, dass die Lösung der schon vor 2000 Jahren gestellten Aufgabe: einen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, bis jetzt noch nicht gelungen, obgleich die Sache doch möglich und die Regel vielleicht ganz einfach ist.



gegen einander senkrechten Linealen*), an deren Enden, um scharfe Zielpuncte zu bekommen, grade aufstehende Stifte (Nadeln) eingesteckt sein können. — Steckt man das Stativ dieses Kreuzes bei P in die Erde und richtet es durch Visiren so, dass die Nadeln 1 und 1 mit dem in B oder A stehenden Messstab in einerlei Richtung sind, und lässt nun in der Richtung, welche die Nadeln 2 und 2 angeben, einen Stab in C stecken, so ist die durch die beiden Puncte P, C bestimmte Linie auf AB perpendikulär. Um von C ein Perpendikel auf die Linie AB zu fällen, trage man das Winkelkreuz so weit in der Linie AB fort, bis der bezeichnete Punct C mit 2, 2, aber zugleich auch 1, 1 mit AB in einerlei Richtung ist, dann ist der so gefundene Punct P der gesuchte.

50.

Lehrsatz. Von einem Puncte A ausserhalb einer Linie BC ist nur ein Perpendikel auf diese Linie möglich.



Beweis. Sei AP auf BC perpendikulär. Um nun zu zeigen, dass jede andere von A an BC gehende Linie, wie AG, schräg gegen BC sein muss, denke man sich AP um sich selbst nach F verlängert, so dass $FP = AP$ wird, und verbinde F mit G, so sind die beiden bei P rechtwinkligen Dreiecke APG und FPG einander gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, nämlich: Seite PG beiden gemein, FP gleich AP gemacht und nach Voraussetzung ist der eingeschlossene

*) In der Regel besteht ein solches Winkelkreuz, das man sich, so wie oben angegeben, leicht selbst verfertigen kann, aus einem runden Körper mit zwei auf einander senkrechten Durchsichten (Dioptern).

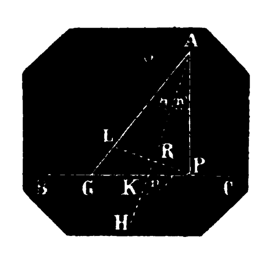
Winkel r, mithin auch sein Nebenwinkel r' ein rechter; daher (§. 34) $\triangle APG \cong \triangle FPG$ und hieraus $\widehat{n} = \widehat{n'}$. Wäre nun n ein rechter Winkel, so wäre es auch n' und die beiden Linien AG, GF bildeten eine einzige grade Linie; das ist nun aber nicht möglich, weil durch zwei Puncte, A und F, nur eine einzige grade Linie AF möglich ist, folglich ist AG schräge gegen BC.

Zusatz 1. Da man sich in jedem Punct der Linie BC, also auch im Puncte G, ein Perpendikel auf BC errichtet denken und dieses, aus eben angeführten Gründen, links von GA fallen muss, so ist Winkel n nothwendig spitz.

Zusatz 2. Wenn ein Dreieck einen rechten oder einen stumpfen Winkel hat, so muss jeder der beiden andern nothwendig spitz sein.

Zusatz 3. Unter Entfernung eines Punctes A von einer Linie BC versteht man allemal das von A an die (nöthigenfalls verlängerte) Linie BC gehende Perpendikel.

51.



Lehrsatz. Das Perpendikel von einem Punct A an eine Linie BC ist kürzer, als jede Schräge.

Beweis. Sei AP senkrecht auf BC und AG eine Schräge, so ist zu zeigen, dass AP kürzer ist, als AG. In Zeichen:

$$AP < AG.$$

Man denke sich den Winkel GAP durch die Linie AH halbirt, so dass also $\widehat{n} = \widehat{n'}$. Von dem Scheitel des rechten Winkels APG denke man sich noch ein Perpendikel PR auf AH gefällt und bis L verlängert. Dass der Fusspunct R dieses letztern Perpendikels nothwendig zwischen A und K fallen muss, folgt aus dem vorhergehenden Satz, weil Winkel v stumpf ist. Die beiden bei R rechtwinkligen Dreiecke APR und ALR sind nach §. 37 gleich, und hieraus folgt: $AL = AP$, mithin ist die Schräge AG um ein Stück LG grösser als AP.

52.

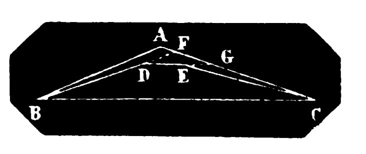
Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser, als die dritte.

Beweis. Sei BC die grösste Seite und darauf von der gegenüber liegenden Spitze das Perpendikel AP gefällt. Nach dem vorhergehenden Satze ist nun die gegen AP schräge Linie CA grösser, als die senkrechte CP. Aus demselben Grunde ist BA grösser als BP, folglich:

$$AB + AC > BP + PC \text{ oder } AB + AC > BC.$$

Zusatz. Wenn in einem beliebigen Vieleck mit lauter ausgehenden Ecken ein anderes Vieleck mit ebenfalls ausgehenden Ecken liegt, so ist der Umfang des äussern Vielecks allemal grösser, als der des innern.

Es sei z. B. das äussere Vieleck ein Dreieck ABC, das innere ein Viereck $BDEC$. Verlängert man die Seiten des innern Vielecks nach F und G, so ist, wie eben bewiesen:

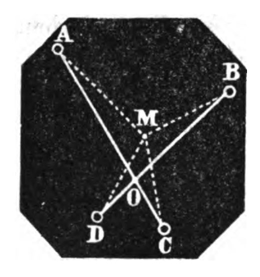


$$AB + AF > BD + DF$$
$$DF + FG > DE + EG$$
$$EG + GC > EC.$$

Lässt man auf beiden Seiten dieser Ungleichheiten Gleiches weg, so bleibt:

$$AB + AF + FG + GC > BD + DE + EC$$
$$\text{d. i. } AB + AC > BD + DE + EC.$$

53.



Aufgabe. Es sind vier Puncte, A B, C, D, gegeben, man soll die Lage eines fünften Punctes, O, so bestimmen, dass die Summe der von ihm nach A, B, C, D gehenden Linien ein Kleinstes (Minimum) werde. (Sollten z. B. von einem Puncte O vier Röhren nach vier andern Puncten gelegt werden, so würde

die Praxis die Lage des Punctes O so zu bestimmen suchen, dass die Summe der vier Wege und deshalb sowohl die Kosten der ersten Anlage, als auch die der spätern Unterhaltung möglichst klein wird.)

Auflösung. Man ziehe die beiden sich kreuzenden Linien AC und BD, so ist ihr Durchschnittspunct O der gesuchte.

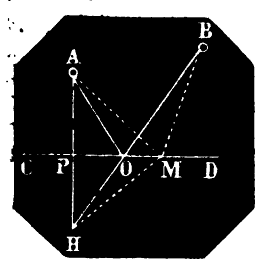
Beweis. Man kann leicht zeigen, dass die Summe der von jedem andern Punct, z. B. von M nach A, B, C, D führenden vier Wege grösser ist, als die vier von O ausgehenden, denn da (nach §. 52):

$$AM + MC > AO + OC$$
$$\text{und } BM + MD > BO + OD$$

so ist auch:

$$AM + MC + BM + MD > AO + OC + BO + OD.$$

54.



Aufgabe. In einer gegebenen Linie CD einen Punct so zu bestimmen, dass die Summe seiner Abstände von zwei beliebig gegebenen Puncten, A und B, ein Kleinstes werde. (Es sei z. B. CD eine Gas- oder Wasserröhre, aus welcher zwei nach A und B leitende Röhren ausmünden sollen.)

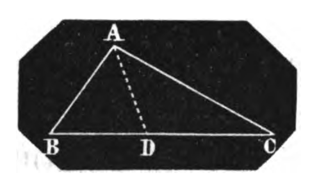
Auflösung. Man fälle von dem einen Puncte A ein Perpendikel AP auf CD und verlängere es um sich selbst bis H, so dass $AP = PH$; ziehe nun HB, so ist der Durchschnittspunct O der gesuchte.

Beweis. Um zu zeigen, dass die Summe der von jedem andern Punct, z. B. von M nach A und B führenden beiden Wege AM und BM grösser ist, als die Summe der von O ausgehenden AO und BO, verbinde man noch M mit H. — Zuerst sind nun die beiden bei P rechtwinkligen Dreiecke APO und HPO gleich, wegen zwei beziehlich gleicher Seiten und des eingeschlossenen rechten Winkels; denn Seite PO ist beiden gemein und, vermöge Construction, das Perpendikel AP gleich dem Perpendikel HP; hieraus (§. 34, Anmerkung) $HO = AO$.

Aus demselben Grunde ist auch $\triangle APM \cong \triangle HPM$, folglich auch $HM = AM$. Die Summe der beiden erstern Wege OA und OB ist also durch die grade Linie BH, und die Summe der beiden andern Wege MA und MB durch die gebrochene Linie BMH dargestellt, da nun (§. 52) $HM + MB > BH$, so ist auch:

$$MA + MB > OA + OB.$$

55.

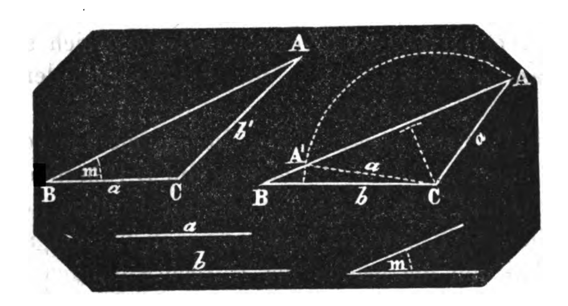


*) **Lehrsatz.** In jedem Dreieck liegt dem grössern Winkel auch die grössere Seite gegenüber, und umgekehrt

Beweis. Es sei der Winkel $\widehat{BAC}$ grösser als $\hat{B}$, so soll auch $\overline{BC} > \overline{AC}$ sein.

Denkt man sich von dem grössern Winkel $\widehat{BAC}$ einen Winkel $\widehat{BAD} = \hat{B}$ abgeschnitten, so ist das Dreieck DAB, wegen der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie AB gleichschenklig (§. 40) daher $AD = BD$. Da nun aber (§. 52) $AD + DC > AC$, so ist auch $BD + DC > AC$ oder $BC > AC$. Der umgekehrte Satz: dass der grösseren Seite auch der grössere Winkel gegenüber liegt, ergiebt sich von selber.

56.



*) **Aufgabe.** Es sind zwei Seiten, a und b, und ein Winkel m gegeben.

Man soll 1) ein Dreieck construiren, welches die drei Stücke so enthält, dass der Winkel m der grössern Seite b

gegenüber liegt, und 2) ein anderes Dreieck zeichnen, in welchem der Winkel m der kleinern Seite a gegenüber liegt.

Auflösung 1. Mache (Fig. 1) BC = der kleinern Seite a, trage hieran in B den Winkel m, beschreibe aus C mit der grössern Seite einen Bogen, der den andern Schenkel des Winkels m in A schneidet, so ist ABC das, durch die gestellte Bedingung (der Winkel m soll der grössern Seite gegenüber liegen) völlig bestimmte und verlangte Dreieck.

Auflösung 2. (Fig. 2.) Man nehme jetzt BC = der grössern Seite b, trage wieder in B den Winkel m an und beschreibe aus C, mit der kleinern Seite a, einen Bogen, so muss dieser jetzt (weil $a < b$) den andern Schenkel des Winkels m zweimal in A und A′ schneiden. Diese letztere Aufgabe führt also auf zwei verschiedene Dreiecke, ABC und A′BC, welche beide die gegebenen Stücke in geforderter Ordnung enthalten. Wäre die kleinere Seite a kürzer als das von C an $\overline{BA}$ gehende Perpendikel, so gäbe es gar kein Dreieck. Wäre sie gleich diesem Perpendikel, so wäre das Dreieck wiederum bestimmt.

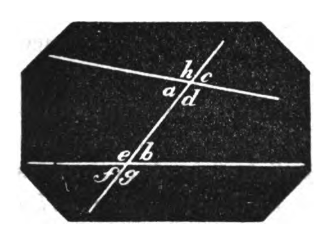
Zusatz. Zu den drei Sätzen über die Bestimmungsstücke eines Dreiecks, §§. 34, 37 und 41, könnte man also noch einen vierten Satz hinzufügen, nämlich: ein Dreieck ist bestimmt: durch zwei Seiten und einen der grössern Seite gegenüber liegenden Winkel.

Jedoch findet dieser Satz erst in der Trigonometrie practischen Nutzen.

Fünftes Buch.

Von den Parallellinien.

57.



Erklärung. Wenn zwei Linien von einer dritten geschnitten werden, so entstehen acht Winkel, von welchen folgende wohl zu merken sind:

1) Je zwei Winkel, welche, wie *a* und *b*, oder *d* und *e*, innerhalb der beiden geschnittenen und an verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegen, heissen Wechselwinkel.

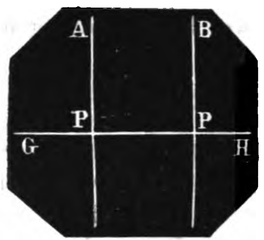
2) Je zwei Winkel, welche aussen und innen an einerlei Seite der schneidenden Linie liegen, heissen gleichliegende (correspondirende) Winkel, solche sind *b* und *c*, *e* und *h*, *a* und *f*, *d* und *g*.

3) Zwei Winkel, welche innerhalb an einerlei Seite der Schneidenden liegen, wie *b* und *d*, oder *e* und *a*, heissen innere Winkel.

58.

Erklärung. Zwei grade Linien, welche in einerlei Ebene liegen und nach keiner Seite hin zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängert denken mag, heissen parallel (gleichlaufend).

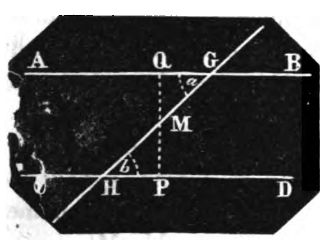
59.



Lehrsatz. **Wenn zwei Linien auf einer dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel.**

Beweis. Seien AP und BP auf GH senkrecht. Weil nun nach §. 50 von einem und demselben Punct nicht zwei Perpendikel auf einer Linie möglich sind, so können auch nicht die Perpendikel AP und BP, weder oberhalb noch unterhalb der Linie GH, in einem Punct zusammen treffen. Es ist also (§. 58) AP || BP. (Das Zeichen || heisst parallel.)

60.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien gegen eine dritte eine solche Lage haben, dass die Wechselwinkel gleich sind so sind die Linien parallel.

In Zeichen:

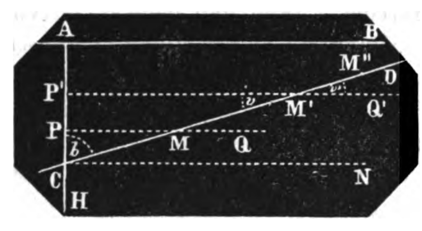
Wenn:	so ist:
$\hat{a} = \hat{b}$	AB || CD.

Beweis. Man denke die Linie GH in M halbirt und von M auf CD das Perpendikel MP gefällt, so muss dieses, rückwärts nach Q verlängert, nothwendig auch auf AB senkrecht stehen, denn die beiden Dreiecke MHP und MGQ sind gleich, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben. Es ist nämlich: $\overline{MH} = \overline{MG}$ und $\hat{a} = \hat{b}$, nach Voraussetzung, dann $\widehat{HMP} = \widehat{GMQ}$ (§. 31), mithin auch $\triangle$ MHP $\cong \triangle$ MGQ (§. 37) und hieraus (§. 34, Anmerkung) $\hat{Q} = \hat{P}$. Da nun, nach Construction, P ein rechter Winkel ist, so ist auch Q ein rechter. Die beiden Linien AB, CD stehen also auf $\overline{PQ}$ senkrecht und sind folglich parallel. (§. 59.)

Zusatz. Wenn die Wechselwinkel *a*, *b* gleich sind, so sind es offenbar auch die gleichliegenden, und die innern betragen dann zusammen zwei Rechte (§. 57). Statt also zu

sagen: zwei Linien sind parallel, wenn die Wechselwinkel gleich sind, kann man auch sagen: wenn die gleichliegenden Winkel gleich sind, oder die innern zwei Rechte betragen.

61.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien, AB, CD, gegen eine dritte, AH, eine solche Lage haben, dass die Wechselwinkel nicht gleich sind, so müssen die Linien, hinreichend verlängert, einmal zusammen treffen und zwar nach der Seite hin, wo die beiden innern Winkel zusammen kleiner, als 2R sind.

Erläuterung. Der einfachern Zeichnung wegen, nehmen wir an, dass die Schneidende AH auf AB in A senkrecht steht, oder durch Drehung um den Punct C in diese Lage gebracht worden, und dass also $\widehat{b} < 90°$.

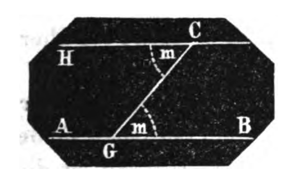
Denkt man sich nun von verschiedenen Puncten, M, M'··· der Linie CD, Perpendikel, MP, M'P'··· auf AC gefällt, so ist klar, dass die Fusspuncte P, P'··· dieser Perpendikel immer näher an A rücken, je weiter man die Puncte M, M'··· von C entfernt nimmt, und dass man von keinem der gefällten Perpendikel, z. B. von M'P' behaupten kann, es sei das letzte, so dass über dasselbe hinaus keins mehr möglich sei; denn weil die Richtung der Linie CD unbegrenzt ist, so kann man, wo auch ein letzter Punct, M', angenommen werden möge, die Linie CM' immer noch um ein beliebiges Stück, M'M'', verlängert und von diesem Punct M'' ein neues Perpendikel, M''P'', auf AC gefällt denken. Da nun nach der Natur der graden Linien kein Theil dieses neuen Perpendikels M''P'' mit einem Theil der Linie CD zusammen fallen kann (§. 8), mithin zwei Scheitelwinkel, v, v', entstehen müssen, so liegt der Punct M'' ausser der Linie P'Q' und zwar oberhalb, daher auch das von M'' auf AC gefällte Perpendikel M''P'' oberhalb P'Q'.

Um nun klar einzusehen, dass die Linien AB und CD sich endlich einmal schneiden müssen, stelle man sich vor: die Senkrechte QP gleite rechtwinklig an AH hinauf, so muss

sie (hinreichend verlängert) die Linie CD (ebenfalls hinreichend verlängert, von der sie also auch nicht an einem vermeintlichen letzten Punct abgleiten kann) immer und selbst noch über AB hinaus schneiden, also auch in der Lage von AB.

Zusatz. Sind zwei Linien parallel, so sind nothwendig auch alle Wechselwinkel oder gleichliegenden Winkel gleich, welche sie mit irgend einer sie schneidenden Linie bilden.

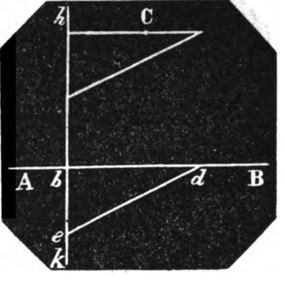
62.



Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct, C, mit einer gegebenen Linie, AB, eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von C nach einem beliebigen Punct, G, in AB die Linie CG und trage den bei G erhaltenen Winkel *m* auf der andern Seite bei C an, so ist CH || AB. (§. 60.)

Zusatz 1. Einfacher zieht man Parallelen mit Hülfe eines Lineals und eines Dreiecks. Man legt nämlich die eine Seite *bd* des Dreiecks an die Linie AB, und an die andere Seite *be* des Dreiecks ein Lineal, *hk*, schiebt dann das Dreieck am festgehaltenen Lineal bis an den Punct C und zieht durch C eine Linie, welche, wegen Gleichheit der gleichliegenden Winkel, mit AB parallel ist.

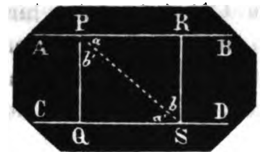


Zusatz 2. Auf dem Felde zieht man durch C eine Parallele mit AB, indem man erst mit Hülfe des Winkelkreuzes von C ein Perpendikel auf AB und dann auf diesem Perpendikel in C wieder ein Perpendikel errichtet (§. 49, Zusatz 2), welches mit AB parallel ist.

63.

Lehrsatz. Zwei Parallellinien sind überall gleich weit von einander entfernt.

Beweis. Unter Abstand zweier Parallellinien versteht man die zwischen beiden gezogene Senkrechte.



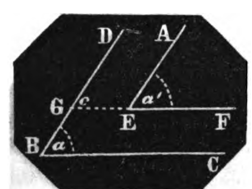
Wir haben also zu beweisen, dass es einerlei ist, an welcher Stelle man sie zieht.

Sei demnach AB || CD und sowohl PQ als RS auf CD, also auch auf AB senkrecht (§. 61, Zusatz), so ist zu zeigen, dass PQ = RS.

Man denke noch die Diagonale PS gezogen, so sind die beiden bei Q und R rechtwinkligen Dreiecke PQS und PRS gleich, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich: Seite PS beiden gemein, $\widehat{a} = \widehat{a'}$ (§. 61, Zusatz) also auch $\widehat{b} = \widehat{b'}$. Daher (§. 37) $\triangle PQS \cong \triangle PRS$ und hieraus PQ = RS.

Zusatz. Auch dieser Lehrsatz dient zum Ziehen paralleler Linien. Errichtet man auf dem Papier oder auf dem Felde auf CD zwei gleich lange Perpendikel, PQ, RS, so ist die durch die beiden Endpuncte P und R gehende Linie AB mit CD parallel.

64.



Lehrsatz. Sind die Schenkel zweier Winkel nach einerlei Seite hin beziehlich parallel, so sind die Winkel gleich.

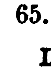
In Zeichen:

Sei:	so ist:
DB || AE	
BC || EF	$\widehat{a} = \widehat{a'}$.

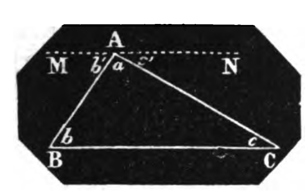
Beweis. Man denke sich EF nach G verlängert, so ist (§. 61, Zusatz) $\widehat{a} = \widehat{c}$ und $\widehat{a'} = \widehat{c}$, folglich auch $\widehat{a} = \widehat{a'}$.

Sechstes Buch.

Summe der innern und äussern Winkel einer gradlinigten Figur.



65.



Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe aller drei Winkel gleich zwei Rechten.

$$a + b + c = 2R = 180°.$$

Beweis. Man denke sich durch einen Winkelpunct, A, eine Linie, MN, parallel mit der gegenüber liegenden Seite BC gelegt, so ist (§. 61, Zusatz) $c' = c$ und $b' = b$. Da nun $b' + a + c' = 2R$ (§. 29), so ist auch $a + b + c = 2.R$

Zusatz 1. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt. Wäre z. B. $\widehat{a} = 110°$, $b = 40°$, so wäre $c = 180° - 150° = 30°$.

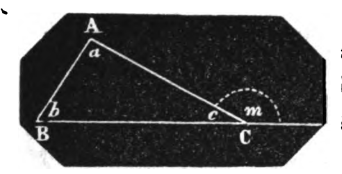
Zusatz 2. In einem gleichseitigen, also auch gleichwinkligen Dreieck ist jeder Winkel $\frac{2}{3}R = 60°$. — In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck ist jeder der beiden spitzen Winkel $= \frac{1}{2}R = 45°$.

Zusatz 3. Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel gleich haben, so ist auch der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern Dreiecks gleich. [Dass zwei verschiedene Dreiecke dennoch dieselben Winkel enthalten können, leuchtet ein, wenn man innerhalb eines beliebigen Dreiecks mit den Seiten des-

selben Parallelen zieht; man erhält ein kleineres Dreieck, welches aber dieselben Winkel hat, wie das grosse. (§. 64.)]

Zusatz 4. Stehen zwei Linien auf den Schenkeln eines Winkels senkrecht, so schneiden sie sich unter demselben Winkel.

66.



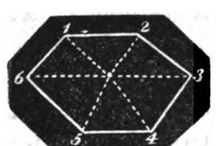
Lehrsatz. Der Aussenwinkel am Dreieck ist gleich der Summe der beiden innern gegenüber liegenden.

In Zeichen:

$$m = a + b.$$

Beweis. Unter Aussenwinkel, m, einer Figur ist derjenige gemeint, den die Verlängerung einer Seite, BC, mit der daran stossenden AC bildet. Da nun nach dem vorhergehenden Lehrsatz a und b mit c vereint zwei Rechte geben, und auch die beiden Nebenwinkel m und c zusammen zwei Rechte betragen, es folglich einerlei ist, ob man $a + b$ oder m zu c addirt, so ist auch $m = a + b$. Wäre z. B. $a = 80°$, $b = 60°$, so wäre $m = 140°$.

67.



Lehrsatz. In jedem Vieleck beträgt die Summe aller innern Winkel so viel mal zwei Rechte, als die Figur Seiten hat, weniger vier Rechte.

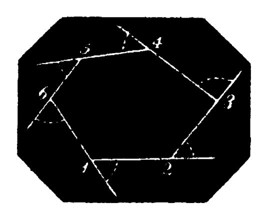
Beweis. Man denke sich von einem innerhalb beliebig angenommenen Punct, o, nach allen Ecken Linien gezogen, so erhält man offenbar just so viele Dreiecke, als die Figur Seiten (Ecken) hat. Da nun die Summe der Winkel in jedem Dreiecke 2R beträgt (§. 65), so enthalten alle Dreiecke zusammen so viel mal 2 R, als die Figur Seiten hat. Werden hievon die vier Rechten abgezogen, welche um den Punct o liegen (§. 30) und nicht mit zu den Winkeln der Figur gehören, so bleibt die im Lehrsatz angegebene Summe übrig. Es ist hiernach die Summe der innern Winkel in einem

Viereck, = 4 R.	Sechseck, = 8 R.
Fünfeck, = 6 R.	Siebeneck, = 10 R. u.s.w.

Es ist also nicht möglich, ein Vieleck zu zeichnen, in welchem die Summe der innern Winkel eine ungrade Anzahl rechte Winkel betrüge.

Anmerkung. Dieser Satz ist ganz allgemein, er passt nämlich auch für Vielecke mit eingehenden Ecken, indem man ein solches in Vielecke mit ausgehenden Ecken zerlegen kann, jedoch muss man dann den Begriff des Winkels (§. 20) weiter ausdehnen und noch sogenannte überstumpfe oder erhabene Winkel unterscheiden, wo sich der eine Schenkel um mehr als zwei Rechte gedreht hat. (Denkt man sich die überstumpfen Winkel um die Endpuncte der Schenkel nach aussen gedreht, so erhält man für jeden überstumpfen Winkel drei andere, deren Summe ihm gleich ist, und es findet dann derselbe Beweis Statt.)

68.



Lehrsatz. Die Summe aller Aussenwinkel eines Vielecks beträgt immer vier rechte Winkel.

Beweis. Jeder Aussenwinkel macht mit seinem innern Nebenwinkel 2R. Die Summe aller äussern und innern Winkel beträgt also grade so viel mal 2R, als die Figur Seiten hat, und da die Summe der innern Winkel um 4R kleiner ist (§. 67), so muss die Summe der Aussenwinkel immer vier Rechte betragen.

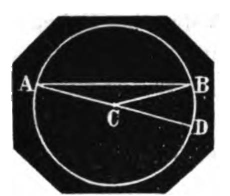
Man kann diesen Satz versinnlichen, indem man durch einen beliebigen Winkelpunct Parallelen mit allen Seiten des Vielecks gezogen denkt, wodurch dann alle Aussenwinkel um einen Punct zu liegen kommen. (§§. 64 und 30.)

Anmerkung. Auch dieser Satz ist ganz allgemein. Denn denkt man sich von einem Eckpuncte aus den Umfang des Vielecks ganz umgangen, so hat man sich um vier rechte Winkel gedreht, indem man bei eingehenden Winkeln die entgegengesetzten Drehungen als subtractiv betrachtet.

Siebentes Buch.

Vom Kreise.

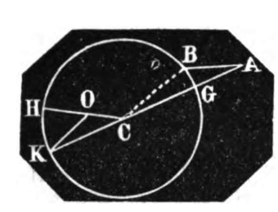
69.



Lehrsatz. Jede Sehne im Kreise ist kürzer, als der Durchmesser. (Siehe §. 17.)

Beweis. Sei AB eine beliebige Sehne und AD ein Durchmesser, so ist zu zeigen, dass AB < AD. Denkt man sich noch den Radius CB gezogen, so ist (§. 17, 3) AC + CB = AD und da nun AC + CB > AB (§. 52), so ist auch: AD > AB.

70.

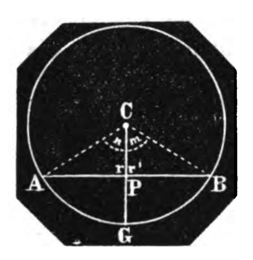


Lehrsatz. Die kürzeste Linie, welche von einem Punct, A, ausserhalb oder von einem Punct, O, innerhalb eines Kreises an die Peripherie gezogen werden kann, ist diejenige, welche verlängert durch den Mittelpunct geht.

Beweis. Die Linien AG, OH gehen verlängert durch den Mittelpunct C. Man denke nun andere Linien, AB, OK, gezogen und B und K mit C verbunden, so ist (§. 52):

AG + CG < CB + AB	und OH + CO < CO + OK
subtr. CG = CB	subtr. CO = CO
bleibt AG < AB	bleibt OH < OK.

71.



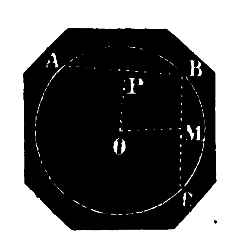
Lehrsatz. Die vom Mittelpunct auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbirt die Sehne und den zugehörigen Bogen.

Beweis. Sei CP senkrecht auf AB und bis G verlängert. Denkt man noch die Radien CA, CB gezogen, so ist, weil

nach Voraussetzung, $\widehat{r} = \widehat{r'} = 90^\circ$, und $\widehat{A} = \widehat{B}$ (§. 40), nothwendig auch $\widehat{n} = \widehat{m}$ (§. 65, Zusatz 3). Daher $\triangle$ ACP $\cong$ $\triangle$ BCP (§. 34 oder 37) und hieraus: AP = BP (§. 34, Anmerkung). Denkt man sich die Figur BCG um CG gedreht und auf ACG gelegt, so müssen, weil die Winkel *n* und *m* sich decken, auch die Bögen $\widehat{AG}$ und $\widehat{BG}$ sich decken, weil deren Puncte gleich weit vom Mittelpunct entfernt sind (§. 17), folglich ist auch $\widehat{AG} = \widehat{BG}$.

Zusatz. Weil vom Mittelpunct C nur ein Perpendikel auf die Sehne AB möglich ist (§. 50) und dieses durch die Mitte geht, so ist auch klar, dass das auf der Mitte P einer Sehne AB errichtete Perpendikel nothwendig durch den Mittelpunct des Kreises gehen und auch den zugehörigen Bogen $\widehat{AGB}$ halbiren muss

72.



Aufgabe. Durch drei ganz beliebig gegebene (jedoch nicht in grader Linie liegende) Puncte, A, B, C, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man verbinde zwei und zwei Puncte, A, B und B, C, so kann man die Linien AB und BC als Sehnen des zu beschreibenden Kreises betrachten. Errichtet man also auf deren Mitten M und P Perpendikel (§. 47, Zusatz), so muss jedes derselben durch den gesuchten Mittelpunct gehen (§. 71, Zusatz) und dieser also der Durchschnittspunct O sein. Dass die beiden Perpendikel sich nothwendig schneiden müssen, folgt daraus: weil sie auf einer gebrochenen Linie stehen, also nicht parallel sein können.

Anmerkung. Wollte man zuvor die Möglichkeit der Auflösung darthun und zeigen, dass es immer einen Punct, O, giebt, der von drei beliebigen, nur nicht in grader Linie liegenden Puncten, A, B, C, gleich weit entfernt ist, so müsste man die Hülfslinien OA, OB, OC ziehen. Aus den entstehenden, paarweise gleichen, bei M und P rechtwinkligen Dreiecken, nämlich: $\triangle$ OMC $\cong$ $\triangle$ OMB und $\triangle$ OPB $\cong$ $\triangle$ OPA (§. 34) folgt dann OA = OB = OC. Der mit OA beschriebene Kreis muss also auch durch die Puncte B und C gehen. Auch ist leicht einzusehen, dass durch drei Puncte nur ein einziger Kreis möglich ist.

73.

Aufgabe 1. Den Mittelpunct eines Kreises oder eines Kreisbogens zu finden.

Aufgabe 2. Einen Kreisbogen zu halbiren.

Aufgabe 3. Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben, so dass die Seiten des Dreiecks Sehnen des Kreises werden.

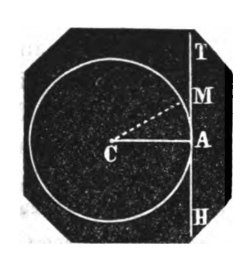
Auflösung 1. Man nehme in dem Bogen drei Puncte beliebig an und verfahre wie im §. 72.

Auflösung 2. Man halbire die zugehörige Sehne (§. 71, Zusatz).

Auflösung 3. Man errichte auf den Mitten zweier Seiten Perpendikel, so ist der Durchschnittspunct derselben der gesuchte Mittelpunct.

Man wird hier die merkwürdige Eigenschaft des Dreiecks bemerken, dass die auf den Mitten seiner Seiten errichteten drei Perpendikel sich in einem und demselben Punct, nämlich im Mittelpunct des umgeschriebenen Kreises schneiden müssen.

74.



Lehrsatz. Eine Linie, TH, welche auf einem Radius, CA, im Endpunct, A, senkrecht steht, hat nur diesen einen Punct A mit der Peripherie gemein.

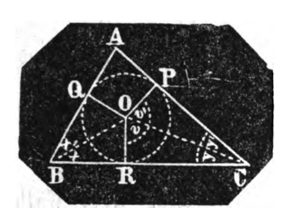
Beweis. Um zu zeigen, dass jeder andere Punct, M, in der Linie TH, wie nahe er auch bei A liegen möge, dennoch ausserhalb des Kreises liegt, denke man vom Mittelpunct nach ihm die Linie CM gezogen, so entsteht ein bei A rechtwinkliges Dreieck CAM, in welchem CM eine Schräge und folglich grösser, als der Radius CA ist (§. 51). Der Punct M liegt also weiter, als A vom Mittelpunct entfernt, mithin ausserhalb des Kreises (§. 17).

75.

Erklärung. Eine grade Linie, welche nur einen Punct mit der Peripherie eines Kreises gemein hat, sonst aber ganz ausserhalb desselben liegt, heisst eine **Tangente (Berührungslinie).**

Um durch einen in der Peripherie gegebenen Punct, A, eine Tangente an den Kreis zu ziehen, verbinde man A mit dem Mittelpunct C und errichte auf dieser Linie CA in A eine Senkrechte (§. 74). Es ist leicht einzusehen, dass durch einen Punct A nur eine einzige Tangente am Kreise möglich ist, d. h. jede andere durch A gehende Linie muss nothwendig in den Kreis hinein treten und ihn schneiden. Denn dächte man sich auf diese zweite Linie von C eine Senkrechte, CP, gefällt, so müsste diese kürzer sein, als die Schräge CA, mithin der Fusspunct P der Senkrechten innerhalb des Kreises liegen.

76.



Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck, ABC, einen Kreis zu beschreiben, so dass der Kreis alle drei Seiten berührt, mithin die Seiten des Dreiecks Tangenten des Kreises werden.

Auflösung. Man halbire zwei beliebige Winkel, B und C (§. 48), fälle vom Durchschnittspunct O der Halbirungslinien auf eine der drei Seiten eine Senkrechte, OR, so ist OR der Radius und O der Mittelpunct des eingeschriebenen Kreises.

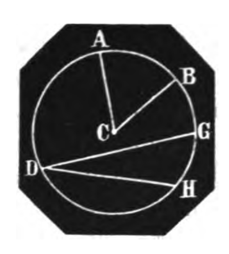
Beweis. Es braucht nur gezeigt zu werden, dass alle drei von O auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel, OR, OP, OQ, gleich sind. Zuvörderst sind nun die beiden bei R und P rechtwinkligen Dreiecke ORC und OPC gleich, weil sie eine Seite, OC, gemeinschaftlich und die beiden anliegenden Winkel gleich haben, denn nach Construction ist $\widehat{y'} = \widehat{y}$, die Winkel bei R und P rechte, mithin auch (§. 65, Zus. 3) $v' = v$; daher $\triangle ORC \cong \triangle OPC$, hieraus: $OR = OP$. Eben so beweist man, dass $\triangle ORB \cong \triangle OQB$, und hieraus: $OR = OQ$.

77.

Aufgabe. Es sind drei gleiche Kreise, A, B, C, gegeben, deren Mittelpuncte A, B, C nicht in grader Linie liegen. Einen vierten Kreis zu beschreiben, der alle drei berührt.

Auflösung. Man verbinde ihre Mittelpuncte, errichte auf die Mitten zweier Verbindungslinien Perpendikel, welche sich in dem gesuchten Mittelpunct schneiden (§. 70).

78.



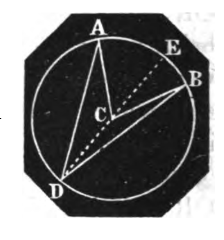
Erklärung. Ein Winkel im Kreise, dessen Scheitel am Mittelpunct liegt, heisst Centriwinkel, zur Unterscheidung von einem solchen, dessen Scheitel in der Peripherie liegt und den man deshalb Peripheriewinkel nennt. — Von jedem dieser Winkel sagt man: er stehe auf dem Bogen, den seine Schenkel zwischen sich fassen. So steht z. B. der Centriwinkel C auf dem Bogen $\widehat{AB}$ und der Peripheriewinkel D auf dem Bogen $\widehat{GH}$.

79.

Lehrsatz. Der Centriwinkel ist immer doppelt so gross, als ein auf demselben Bogen stehender Peripheriewinkel. *)

Beweis. Wir müssen hier drei Fälle besonders betrachten.

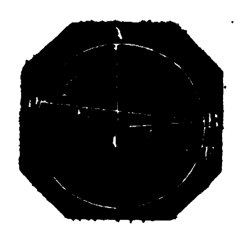
1. Fall. Wenn der Mittelpunct auf einem Schenkel des Peripheriewinkels liegt. In diesem Falle ist der Centriwinkel a Aussenwinkel an dem gleichschenkligen Dreieck CAD, mithin $\widehat{a} = 2\widehat{n}$. (§§. 66, 40 und 17, 3.)



2. Fall. Wenn der Mittelpunct zwischen die Schenkel des Peripheriewinkels fällt. Man denke jetzt den Durchmesser DE gezogen, so theilt dieser sowohl den Centriwinkel, als den Peripheriewinkel, jeden in zwei Theile und es ist nun, ganz wie im ersten Fall, der links liegende Theil des Centriwinkels doppelt so gross, als der links liegende Theil des Peripheriewinkels, nämlich: $\widehat{ACE} = 2 \cdot \widehat{ADE}$. Ebenso auf der andern Seite $\widehat{ECB} = 2 \cdot \widehat{EDB}$, mithin $\widehat{ACE} + \widehat{ECB} = 2 \cdot \widehat{ADE} + 2 \cdot \widehat{EDB}$ oder $\widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{ADB}$.

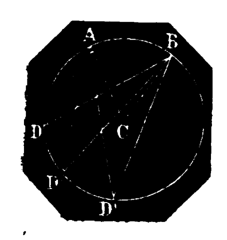
---

*) Um Raum zu sparen, werden wir von jetzt an, statt die Beweise wie bisher in Worten zu geben, oft nur die zur Führung derselben nöthigen Sätze citiren. Auch sollte der Anfänger von nun an versuchen, Beweise und Auflösungen selber zu finden.



3. Fall. Wenn der Mittelpunct ausserhalb der Schenkel des Peripheriewinkels liegt. Man denke wieder den Durchmesser DE gezogen, so ist am gleichschenkligen Dreieck CAD der Winkel CDA = A (§. 40), der Aussenwinkel ACE = 2·CDA oder $a + b = 2x + 2y$, da nun aber (erster Fall) $b = 2y$, so bleibt offenbar, wenn man b gegen $2y$ weglässt, $a = 2x$.

80.



Lehrsatz. Peripheriewinkel auf einerlei Bogen sind gleich.

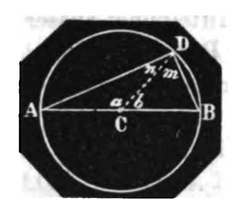
Beweis. Dies folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Lehrsatz, nach welchem jeder auf dem Bogen $\widehat{AB}$ stehende Peripheriewinkel D, D′, D″··· halb so gross ist, als der auf demselben Bogen stehende Centriwinkel ACB.

Zusatz. Weil ein Centriwinkel, ACB, just so viele Winkelgrade hält, als der Bogen AB, worauf er steht, Bogengrade, so ist klar, dass ein auf demselben Bogen stehender Peripheriewinkel, D, D′··· just halb so viele Grade hält. Man pflegt dies so auszudrücken: Ein Centriwinkel hat den ganzen Bogen, ein Peripheriewinkel den halben Bogen zu seinem Maasse, worauf er steht. Kämen z. B. von den 360 gleichen Bögen (Bogengrade), in welche man sich die ganze Peripherie getheilt denkt, 60 solcher Theile auf den Bogen AB, so wäre der Centriwinkel ACB $= 60°$ und der Peripheriewinkel D $= \frac{60°}{2} = 30°$.

81.

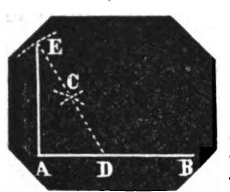
Lehrsatz. Jeder Winkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel.

Beweis. Unter Winkel im Halbkreise versteht man einen Peripheriewinkel, der auf dem Halbkreise oder Durchmesser steht und hieraus folgt schon, weil nach §. 80, Zusatz, der Peripheriewinkel ADB den halben Bogen AB zu seinem Maasse hat, dass $\widehat{ADB} = \frac{180°}{2} = 90°$. Um dies jedoch noch



auf eine andere Weise zu zeigen, verbinde man D mit dem Mittelpunct C, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke, CAD und CDB, daher $\widehat{A} = \widehat{n}$ und $\widehat{B} = \widehat{m}$ (§. 40). Da nun (§. 66) der Aussenwinkel *a* am Dreieck CDB doppelt so gross als *m*, und der Aussenwinkel *b* am Dreieck CAD doppelt so gross als *n*, und *a* und *b*, als Nebenwinkel, 2 R betragen, so müssen *m* und *n* zusammen, d. i. der Winkel im Halbkreise, nämlich ADB, ein Rechter sein.

82.

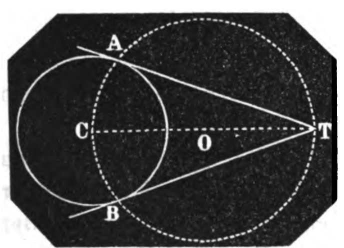


Aufgabe. Auf einer Linie, AB, im Endpuncte A ein Perpendikel zu errichten, ohne die Linie erst zu verlängern.

Auflösung. Man nehme in AB einen Punct, D, beliebig und beschreibe aus A und D mit einerlei Radius zwei Bögen, die sich in C schneiden. Aus C beschreibe mit demselben Radius einen Bogen, welcher die von D durch C gezogene Linie in E schneidet und ziehe dann EA, welches das verlangte Perpendikel ist.

Beweis. Denkt man sich den aus C beschriebenen Bogen zu einem ganzen Kreise vollendet, so ist, weil DE ein Durchmesser, EAD ein Winkel im Halbkreise, mithin ein rechter Winkel (§. 81).

83.

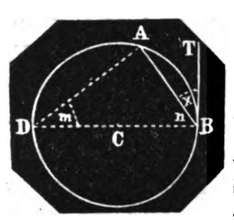


Aufgabe. Von einem ausserhalb eines Kreises, C, gegebenen Punct, T, eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

Auflösung. Ziehe CT und beschreibe über diese, als Durchmesser, einen zweiten Kreis, der den gegebenen in zwei Puncten, A und B, schneidet, ziehe AT und BT, so hat man zwei Tangenten.

Beweis. Denkt man noch die Radien CA, CB gezogen, so sind A und B Winkel im Halbkreise und folglich AT senkrecht auf CA (§§. 81, 74).

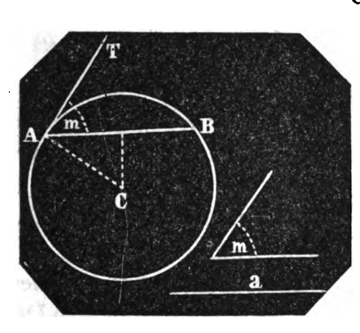
84.



Lehrsatz. Ein Tangentenwinkel, d. i. ein Winkel, den eine Tangente, TB, und eine Sehne, AB, mit einander machen, hat die Hälfte des Bogens AB zu seinem Maasse, den seine Schenkel zwischen sich fassen und ist also gleich einem Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen AB steht.

Beweis. Ist B der Berührungspunct, so muss der von B gezogene Durchmesser DB auf BT senkrecht stehen (§. 75), also $x + n = 90°$ sein. Zieht man noch AD, so ist A $= 90°$ (§. 81), folglich auch $m + n = 90°$ (§. 65). Da es nun einerlei ist, ob man x oder m zu n addirt, indem man jedesmal $90°$ erhält, so muss auch $x = m = \frac{\overline{AB}}{2}$ sein. (§. 80, Zusatz.)

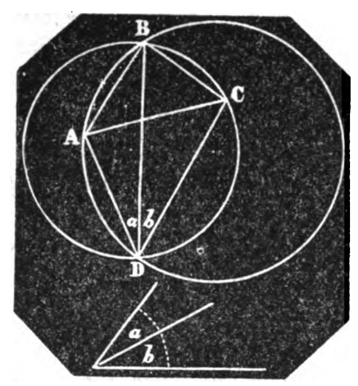
85.



Aufgabe. Ueber eine als Sehne gegebene Linie, a, einen Kreis zu beschreiben, in welchem alle auf dieser Sehne oder ihrem Bogen stehenden Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel, m, gleich sind.

Auflösung. Stecke die gegebene Sehne a in AB ab, trage an das eine Ende derselben den gegebenen Winkel m und betrachte den andern Schenkel AT als Tangente. Errichte nun auf AT in A und auf der Mitte von AB Perpendikel (§. 82, 47, Zusatz und 45), so ist deren Durchschnittspunct C der gesuchte Mittelpunct und CA = CB der Radius (§. 71, Zusatz und 75) und alle auf dem Bogen AB stehenden Peripheriewinkel sind dem Winkel m gleich (§. 84).

86.



*) **Aufgabe.** Es sind die Lagen dreier Puncte, A, B, C, oder was dasselbe ist, das Dreieck ABC und zwei Winkel, *a* und *b*, gegeben. Es soll die Lage eines vierten Punctes, D, so bestimmt werden, dass die von ihm nach A und B gehenden Linien den Winkel *a* und die nach B und C gehenden Linien den Winkel *b* bilden.

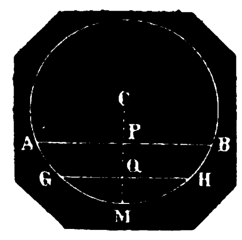
Auflösung. Man beschreibe, wie in vorhergehender Aufgabe, über AB als Sehne einen Kreis, in welchem alle auf dieser Sehne stehenden Peripheriewinkel dem gegebenen Winkel *a* gleich sind, so muss der gesuchte Punct D nothwendig irgendwo in dieser Kreislinie liegen. Beschreibt man also auch über BC als Sehne einen Kreis, in welchem alle auf BC stehenden Peripheriewinkel dem Winkel *b* gleich sind, so muss der gesuchte Punct D auch in diesem Kreise liegen, und mithin (weil er in beiden Kreisen zugleich liegen muss) in ihrem Durchschnittspunct D.

Anmerkung 1. Wären zufällig die Winkel A und C des gegebenen Dreiecks den gegebenen Winkeln *b* und *a* gleich, so fallen beide Kreise zusammen und die Lage des Punctes D ist dann nicht bestimmt.

Dieses sogenannte Pothenot'sche Problem ist sowohl für die niedere als höhere Geodäsie sehr wichtig.

Anmerkung 2. Beschreibt man über AC als Sehne einen Bogen, in welchem alle Peripheriewinkel dem Winkel ADC $= a + b$ gleich sind, so muss auch dieser Bogen durch den gesuchten Punct D gehen. Auch ist klar, dass die drei gegebenen Puncte, A, B, C, in grader Linie liegen können, so wie auch, dass der Punct D jenseits $\overline{AC}$, innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks ABC fallen kann.

87.



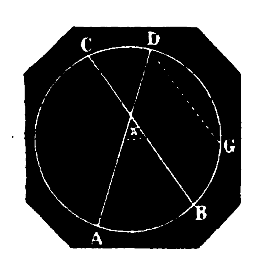
Lehrsatz. Zwei parallele Sehnen fassen gleiche Bögen zwischen sich.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
$AB \parallel GH$	$\widehat{AG} = \widehat{BH}$.

Beweis. Das vom Mittelpunct auf AB gefällte Perpendikel CP steht auch senkrecht auf GH (§. 61, Zusatz) und halbirt die Sehnen und ihre Bögen (§. 71). Es ist also $\widehat{AM} = \widehat{BM}$, und da auch $\widehat{GM} = \widehat{HM}$, so ist auch, Gleiches von Gleichem subtrahirt: $\widehat{AG} = \widehat{BH}$. Dies folgt auch, wenn man AH zieht, dann sind die Wechselwinkel gleich, und zu gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Bögen.

88.



Lehrsatz. Ein Winkel, durch zwei Sehnen gebildet, hat die halbe Summe der beiden Bögen zu seinem Maasse, welche seine*) Schenkel zwischen sich fassen.

In Zeichen:

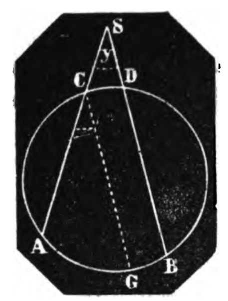
$$x = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

Beweis. Denkt man $DG \parallel CB$ gezogen, so ist $\widehat{D} = \widehat{x}$ (§. 61, Zusatz). Der Peripheriewinkel D hat nun aber den halben Bogen $\widehat{ABG}$, d. i. die Hälfte von $(\widehat{AB} + \widehat{BG})$, also auch, weil $\widehat{CD} = \widehat{BG}$ (§. 87), die Hälfte von $(\widehat{AB} + \widehat{CD})$ zu seinem Maasse. Dieser Satz ist besonders beim Gebrauch der Winkelmesser wichtig. Kämen z. B. von der in 360 Bogengrade getheilten Peripherie 60° auf AB und 40° auf CD, so wäre $x = \frac{60° + 40°}{2} = 50°$.

---

*) Es sollte heissen: seine directen und entgegengesetzten.

89.



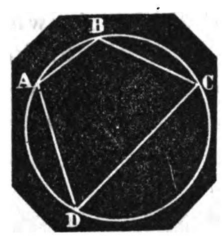
Lehrsatz. Ein Winkel, durch zwei Sekanten (d. i. den Kreis schneidende Linien) gebildet, hat die halbe Differenz der beiden Bögen zu seinem Maasse, welche seine Schenkel zwischen sich fassen.

In Zeichen:

$$y = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}.$$

Beweis. Denkt man sich CG ∥ DB gezogen, so ist $C = y$, folglich $y = \frac{\widehat{AG}}{2}$; weil aber $\widehat{CD} = \widehat{GB}$ (§. 87), folglich $\widehat{AG} = \widehat{AB} - \widehat{GB} = \widehat{AB} - \widehat{CD}$, so ist auch $y = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$. Kämen z. B. 124 Bogengrade auf $\widehat{AB}$ und 40° auf $\widehat{CD}$, so wäre $y = \frac{124 - 40}{2} = 42°$.

90.



Lehrsatz. In jedem Viereck, dessen Ecken in einem Kreise liegen, betragen je zwei gegenüber liegende Winkel zusammen zwei Rechte.

$$\hat{A} + \hat{C} = 180°$$
$$\hat{B} + \hat{D} = 180°$$

Beweis. Der Peripheriewinkel A hat die Hälfte des Bogens $\widehat{BCD}$, und der gegenüber liegende Winkel C die Hälfte des Bogens $\widehat{DAB}$, also beide zusammen die Hälfte der ganzen Peripherie zu ihrem Maasse, daher $\hat{A} + \hat{C} = \frac{360°}{2} = 180°$. Eben so $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

Zusatz. Wenn in einem Viereck zwei gegenüber liegende Winkel zusammen zwei Rechte betragen, so lässt sich um ein solches Viereck immer ein Kreis beschreiben, sonst nicht.

Achtes Buch.

Vom Parallelogramm und Flächenmaass.

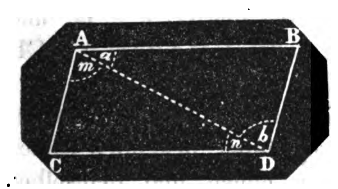
91.

Erklärungen. Ein Viereck erhält nach dem Verhältniss und der Lage seiner Seiten folgende besondere Namen. Es heisst:

1) Parallelogramm, wenn je zwei gegenüber liegende Seiten parallel sind.
2) Rechteck, wenn alle vier Winkel rechte sind.
3) Quadrat, wenn alle Winkel rechte und alle Seiten gleich lang sind.
4) Raute, wenn nur die Seiten gleich lang sind.
5) Trapez, wenn nur zwei Seiten parallel sind.
6) Viereck schlechtweg, wenn es keins der vorhergehenden ist.

92.

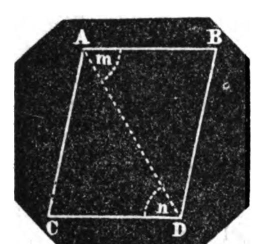
Lehrsatz. In jedem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Seiten und Winkel einander gleich, und eine Diagonale theilt es in zwei gleiche Dreiecke.



Beweis. Weil im Parallelogramm die gegenüber liegenden Seiten parallel sind, so sind erstlich die Wechselwinkel gleich, $a = n$, $b = m$, §. 61, Zusatz. Die beiden Dreiecke ACD und ABD haben nun eine gemeinschaftliche Seite und beide anliegenden Winkel gleich, daher $\triangle ACD \cong \triangle ABD$ (§. 37) und hieraus folgt $AB = CD$, $AC = BD$.

Zusatz. Wenn umgekehrt in einem Viereck die gegenüber liegenden Seiten gleich sind, so sind sie nothwendig auch parallel und das Viereck ist dann ein Parallelogramm; denn nachdem die Diagonale AD wieder gezogen, folgt nach §. 41 die Gleichheit der Dreiecke und daraus die Gleichheit der Wechselwinkel. Diesen Satz kann man zur Construirung eines Parallelogramms benutzen, von welchem zwei Seiten, AC, CD, und der eingeschlossene Winkel C gegeben sind.

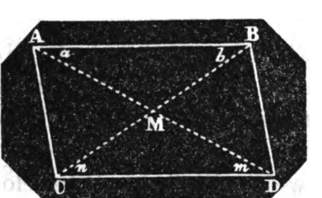
93.



Lehrsatz. Wenn in einem Viereck zwei Seiten parallel und gleich sind, so sind es die beiden andern Seiten auch, und das Viereck ist dann ein Parallelogramm.

Beweis. Sei AB gleich und parallel mit CD (AB ╫ CD). Ziehe eine Diagonale, AD, so sind, weil AB || CD, die Wechselwinkel *m* und *n* gleich. Da nun auch AB = CD, so sind die beiden Dreiecke ACD und ABD gleich (§. 34) und hieraus folgt AC ╫ BD.

94.



Lehrsatz. Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms halbiren sich gegenseitig.

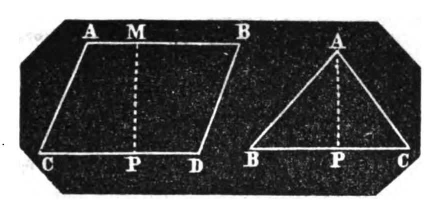
Beweis. Weil AB || CD, so ist (§. 61, Zusatz) $a = m$, und $b = n$, und da auch AB = CD, so ist (§. 37) △ MAB ≅ △ MCD und hieraus folgt: AM = MD und CM = MB.

Aufgabe. Man zeige, dass die von den Ecken eines beliebigen Dreiecks ABC auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten drei Perpendikel sich in einem und demselben Puncte schneiden müssen.

Auflösung. Man ziehe durch die Ecken A, B, C Parallelen mit den gegenüber liegenden Seiten, so bilden diese

ein neues Dreieck DEF und der Beweis folgt nun leicht aus: §. 61, Zus., §. 92 und §. 73, Aufg. 3.

95.



Erklärungen 1. Wenn man in einem Parallelogramm eine beliebige Seite, CD, als Grundlinie betrachtet, so heisst das von einem beliebigen Punct, M, der gegenüber liegenden parallelen Seite auf die (nöthigenfalls verlängerte) Grundlinie gefällte Perpendikel MP die Höhe des Parallelogramms. Nimmt man in einem Rechteck eine Seite zur Grundlinie, so ist die daran stossende die Höhe.

In einem Quadrat sind Höhe und Grundlinie gleich.

2. Eben so kann man in einem Dreieck eine beliebige Seite, BC, als Grundlinie betrachten und dann heisst das von der gegenüber liegenden Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel AP die Höhe des Dreiecks. Befindet sich an der Grundlinie ein stumpfer Winkel, so fällt das die Höhe angebende Perpendikel ausserhalb des Dreiecks auf die Verlängerung der Grundlinie.

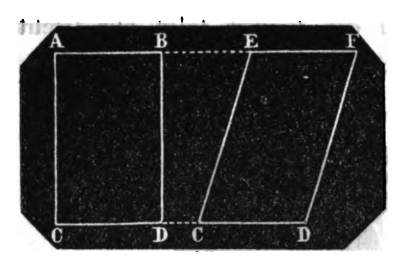
Nimmt man in einem rechtwinkligen Dreieck eine Cathete zur Grundlinie, so ist die andere Cathete die Höhe.

3. Die Fläche, welche eine Figur einschliesst, heisst deren Inhalt, und die Summe aller, die Fläche begrenzenden Linien der Umfang der Figur.

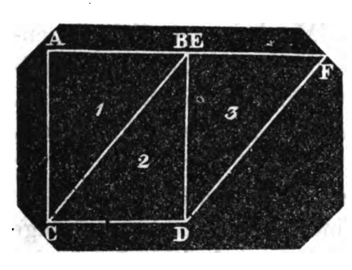
4. Wenn zwei Figuren gleich grossen Inhalt haben (so dass z. B. auf beiden gleich viel wachsen könnte), so nennt man sie: inhaltsgleich oder gleich gross. Zwei Figuren (z. B. ein Dreieck und ein Parallelogramm) können inhaltsgleich oder gleich gross sein (=), obwohl sie an Umfang und Form sehr verschieden sind.

96.

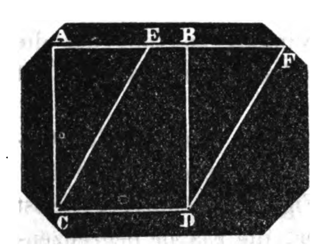
Lehrsatz. Ein Parallelogramm ist so gross, als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe.



Beweis. Seien die Grundlinien (CD) und Höhen des Rechtecks ABDC und des Parallelogramms EFDC gleich, so muss, wenn man die Grundlinie des letztern auf die des erstern gelegt denkt, die Seite EF auf die verlängerte AB fallen. Nach Lage der Seiten können nun, wenn die gleichen Grundlinien sich decken, folgende drei Fälle Statt finden, die wir besonders betrachten wollen.

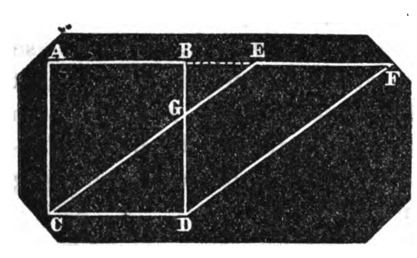


1. Fall. Wenn E auf B fällt. In diesem Falle erhält man drei an einander liegende gleiche Dreiecke (§§. 92 und 41) und es ist klar, dass das erste und zweite zusammen so gross sind, als das zweite und dritte zusammen, d. i. Rechteck ABDC = Parallelogramm EFDC (§. 95, 4).



2. Fall. Wenn E zwischen A und B fällt.

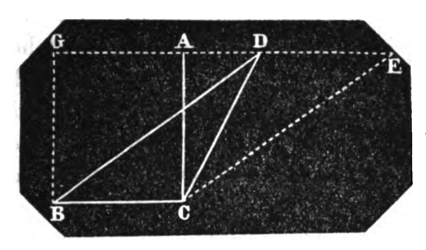
Nun ist das Dreieck AEC ≌ Dreieck BFD. Legen wir also zu beiden das dazwischen liegende Trapez, so ist wieder Rechteck ABDC = Parallelogramm EFDC.



3. Fall. Wenn E auf die Verlängerung von AB fällt. Alsdann ist △ EAC ≌ △ FBD (§. 37). Subtrahirt man von diesen beiden gleichen Dreiecken das Dreieck EBG, so bleibt Trapez BGCA = Trapez EGDF (§. 95, 4). Addirt man zu beiden gleich grossen Trapezen das Dreieck GCD, so ist wiederum Rechteck ABDC = Parallelogramm EFDC.

Zusatz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind inhaltsgleich, weil jedes so gross ist als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe.

97.



Lehrsatz. Ein Dreieck ist halb so gross, als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe.

Beweis. Auf der Grundlinie BC des Dreiecks DBC denke man sich das Rechteck GACB von gleicher Höhe errichtet (§. 95, 2). Denkt man sich jetzt das Dreieck DBC zu einem Parallelogramm, DECB, ergänzt, so ist dieses Parallelogramm eben so gross, als das Rechteck GACB (§. 96), folglich ist auch die Hälfte des Parallelogramms, nämlich das Dreieck DBC gleich dem halben Rechteck GACB (§. 92).

Zusatz. Dreiecke von einerlei Grundlinie und Höhe sind inhaltsgleich, weil jedes halb so gross ist, als das Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe.

98.

Flächeninhalt. Durch den vorhergehenden Lehrsatz sind wir nun in den Stand gesetzt, die Flächengrösse einer jeden gradlinigt begrenzten Figur auszumessen und durch Zahlen bestimmt anzugeben. Da wir nämlich eine jede, in noch so beliebigem Zickzack gradlinigt begrenzte Figur durch Diagonalen immer in ein Netz von Dreiecken zerlegen können, und jedes Dreieck halb so gross ist, als ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe, so kommt die so verwickelt scheinende Aufgabe darauf zurück, nur Mittel und Wege zu ersinnen: den Flächeninhalt eines Rechtecks durch Zahlen anzugeben.*)

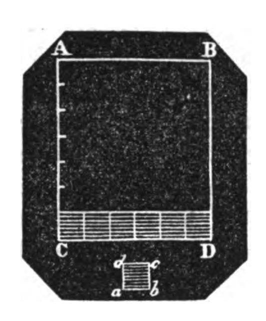
*) Die alten Römer unter den Consuln verstanden noch nicht, den Flächeninhalt eines Dreiecks zu bestimmen.

Als die bequemste Form der Flächeneinheit zeigt sich sogleich die quadratförmige.

Quadratförmige Flächeneinheiten giebt es in der Praxis von verschiedener Grösse und die alle nach der ihnen zum Grunde liegenden Längeneinheit, nur mit dem Beiwort: Quadrat benannt werden. Wäre z. B. (siehe folgende Figur) die Linie $ab = 1$ Fuss, so wäre das darüber stehende Quadrat, d. h. die davon eingeschlossene Fläche $abcd = 1$ Quadratfuss. Wäre $ab = 1$ Zoll, so wäre die Fläche von $abcd = 1$ Quadratzoll. Hiernach versteht man nun auch, was eine Quadrat-Ruthe, Quadrat-Elle, Quadrat-Meile etc. bedeutet.



99.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Product aus Grundlinie und Höhe.

Beweis. Sei, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, die Flächeneinheit $abcd = 1$ Quadratfuss. Die Längeneinheit $ab = 1$ Fuss sei sechsmal in der Grundlinie CD und siebenmal in der Höhe AC enthalten, so ist einleuchtend, dass, wie in der Zeichnung angedeutet, auf der Grundlinie gerade 6 Quadratfuss neben einander Platz finden, und dass 7 solche Reihen, von je 6 Quadratfuss, das ganze Rechteck ausfüllen und folglich dessen Inhalt in Quadratfuss ausgedrückt, 7 mal 6 Quadratfuss oder $= 42$ Quadratfuss ist, und so in jedem andern Fall. Wäre z. B. $CD = 7\frac{1}{2}$ Fuss, $AC = 10$ Fuss, so wäre der Inhalt des Rechtecks $= 75$ Quadratfuss. Die Regel, um den Inhalt eines Rechtecks zu finden, ist also diese: Man misst mit der, der Flächeneinheit zu Grunde liegenden Längeneinheit erst Grundlinie und Höhe des Rechtecks, multiplicirt dann beide (vorläufig als unbenannt zu betrachtenden) Zahlen mit einander und legt dem Product die Benennung der Längeneinheit, jedoch mit dem Beiwort „Quadrat," bei. Wäre z. B. $CD = 3$ Zoll, $AC = 5$ Zoll, so wäre der Inhalt des Rechtecks $= 15$ Quadratzoll.

Zusatz 1. Eben so findet man den Inhalt eines Parallelogramms, indem man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt (§ 95, 1 und §. 96).

Zusatz 2. Dividirt man den Inhalt eines Rechtecks durch die Grundlinie oder Höhe, so giebt der Quotient die andere Linie.

100.

Die im vorigen Lehrsatz ausgesprochene Regel, nach welcher man Grundlinie und Höhe mit einander multipliciren muss, um den Inhalt eines Rechtecks zu finden, pflegt man kurz in Zeichen anzudeuten, indem man die beiden Linien als Factoren ansetzt und ihr Product (Flächeninhalt) mit F bezeichnet. Für das Rechteck ABCD (§. 99) wäre also dessen Inhalt: $F = AC \cdot CD$. Gewöhnlich bezeichnet man aber bequemer die Höhe durch h und die Grundlinie (Basis) durch b, nämlich:

$$F = bh.$$

Es versteht sich bei dieser Formel aber von selbst, dass man die Lineargrössen b und h mit einer Längeneinheit ausgemessen und als Zahlen denken muss, weil man keine Linien, als ausgedehnte Grössen, mit einander multipliciren kann.

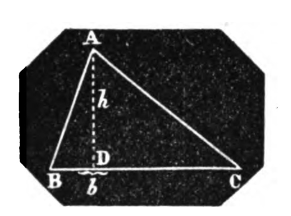
Auch ist klar, dass beide Factoren, b und h, einnamig und gleichnamig sein, und nöthigenfalls erst auf solche reducirt werden müssen, bevor man sie mit einander multipliciren kann. In der Regel ist es am bequemsten, mehrnamige Zahlen statt auf die niedere, auf die höhere zu reduciren. Hierbei wollen wir nur noch bemerken, dass im Duodecimal-System 1 Fuss = 12 Zoll, 1 Zoll = 12 Linien und folglich 1 Quadratfuss = 144 Quadratzoll, 1 Quadratzoll = 144 Quadratlinien. Im Decimal-System dagegen ist 1 Fuss = 10 Zoll, 1 Zoll = 10 Linien, 1 Quadratfuss = 100 Quadratzoll etc.

101.

Aufgabe. Folgende Rechtecke zu berechnen; h bedeutet Höhe, b Grundlinie, F Inhalt, $\square'$ Quadratfuss etc. Wo kein Decimalzeichen steht, ist immer Duodecimalmaass gemeint.

	Gegeben:		Gesucht:
1)	$h = 8\frac{2}{3}'$,	$b = 6\frac{3}{4}'$;	$F = 24\frac{3}{4}\square' = 24\square'\ 108\square''$
2)	$h = 2'$,	$b = 7''$;	$F = 1\frac{1}{6}\square' = 1\square'\ 24\square''$
3)	$h = 104'\ 7''$,	$b = 90'\ 6''$;	$F = 9464\frac{19}{24}\square' = 9464\square'\ 114\square''$
4)	$h = 25{,}9'$,	$b = 37{,}8'$;	$F = 979{,}02\square'$
5)	$F = 230\frac{7}{8}\square'$,	$h = 13\frac{3}{4}'$;	$b = 16\frac{87}{110}' = 16'\ 9\frac{27}{55}''$
6)	$F = 4\square'$,	$b = 10''$;	$h = 4\frac{4}{5}' = 4'\ 9\frac{3}{5}''$
7)	$F = 285\square'\ 135\square''$,	$b = 18'\ 9''$;	$h = 15\frac{1}{4}' = 15'\ 3''$
8)	$F = 1{,}06\square'$,	$b = 0{,}7'$;	$h = 1'{,}51$

102.



Lehrsatz. **Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Product aus Grundlinie und Höhe.**

In Zeichen:

$$F = \tfrac{1}{2}BC \cdot AD,$$

oder kürzer:

$$F = \tfrac{1}{2}bh.$$

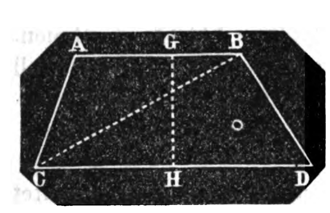
Beweis. Dies folgt aus §. 97, wonach ein Dreieck just halb so gross ist, als ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe.

Um den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, kann man auch erst die Grundlinie oder die Höhe durch 2 dividiren, also die halbe Grundlinie mit der Höhe oder die halbe Höhe mit der Grundlinie multipliciren.

Umgekehrt findet man die Höhe eines Dreiecks, wenn man den Inhalt durch die halbe Grundlinie dividirt. Beispiele:

Gegeben:		Gesucht:
1) $b = 24' \, 8''$,	$h = 13' \, 9''$;	$F = 169\tfrac{7}{12}\square' = 169\square' \, 84\square''$
2) $F = 154\tfrac{2}{3}\square'$,	$b = 24' \, 8''$;	$h = 12\tfrac{20}{37}' = 12' \, 6\tfrac{18}{37}''$
3) $b = 1{,}2'$,	$h = 9{,}3'$;	$F = 5{,}58\square'$
4) $F = 12{,}86\square'$,	$h = 6{,}3'$;	$b = 4{,}08' \cdots$

103.



Lehrsatz. **Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Product aus der Höhe und der halben Summe seiner beiden parallelen Seiten.**

In Zeichen:

$$F = \frac{AB + CD}{2} \cdot GH,$$

oder kürzer, indem man $CD = a$, $AB = b$, $GH = h$ setzt:

$$F = \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

Beweis. Durch eine Diagonale wird das Trapez in zwei Dreiecke getheilt, welche die parallelen Seiten $CD = a$ und $AB = b$ zu Grundlinien und die Höhe des Trapezes $HG = h$, zur Höhe haben (§. 63). Die Flächensumme beider Dreiecke

giebt die Fläche des ganzen Trapezes. Nun ist die Fläche des Dreiecks BCD $= \frac{1}{2} ah$ und die des Dreiecks CAB $= \frac{1}{2} bh$, mithin, die Summe beider $F = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Wäre z. B. $a = 16' \; 4''$, $b = 10' \; 6''$ und $h = 9' \; 8''$, so wäre $F = \frac{1}{2} \cdot 26\frac{5}{6} \cdot 9\frac{2}{3}$, d. i. $F = 129\frac{25}{36}$□' = 129□' 100□''.

104.

Um den Flächeninhalt einer jeden andern gradlinigen Figur zu bestimmen, zerlege man sie durch schicklich gezogene Diagonalen in lauter Dreiecke, messe in jedem eine Grundlinie und die zugehörige Höhe, berechne den Inhalt eines jeden Dreiecks besonders, so giebt die Summe aller den Inhalt der ganzen Figur. Um nicht mehr Linien zu messen, als nöthig ist, kann man darauf achten, dass immer zwei Dreiecke eine gemeinschaftliche Grundlinie haben. Oftmals lässt sich auch eine Figur oder Theile derselben in Parallelogramme, Rechtecke oder Trapeze zerlegen.

Da im Quadrat Grundlinie und Höhe gleich sind, so findet man den Inhalt eines Quadrats, indem man eine Seite desselben mit sich selbst multiplicirt, und umgekehrt findet man die Seite eines Quadrats, wenn man aus dem Inhalt desselben die Quadratwurzel zieht. Wäre z. B. in dem Quadrat ABGF (siehe folgende Figur) die Seite AB $= 12'$, so wäre der Inhalt $F = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = 144$□'. Wäre umgekehrt der Inhalt = 144□' gegeben, so wäre eine Seite desselben $= \sqrt{144} = 12'$.

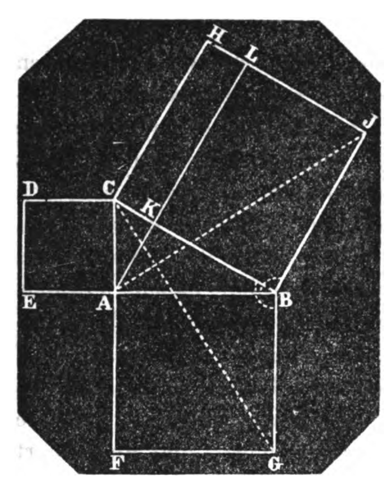
Beispiele. Man suche die Seiten der Quadrate, deren Inhalt 106929□', 604□' 140□'', 2□$\frac{1}{4}$', 1□', 0,6□', 2,8□', 0,908□'.

Antwort. Die Seiten sind 327', 24',596 · ·, 1',414 · ·, 1'118 · ·, 0',77 · ·, 1',67 · ·, 0',953 · ·.

Neuntes Buch.

Der Pythagoräische Lehrsatz.

105.



Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse so gross, als die Quadrate der beiden Catheten zusammen genommen.

In Zeichen: *)

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Beweis. Sei CAB ein bei A rechtwinkliges Dreieck und über seinen drei Seiten Quadrate errichtet, so soll die Fläche des auf der Hypotenuse BC stehenden Quadrats BCHJ allein so gross sein, als die Flächen der beiden auf den Catheten stehenden Quadrate ABGF und ACDE zusammen genommen.

Aus dem Scheitel A des rechten Winkels sei AL || CH gezogen, so ist dadurch das Quadrat der Hypotenuse in zwei Rechtecke CHLK und LKBJ getheilt, und es lässt sich nun zeigen, dass jedes der beiden Rechtecke seinem benachbarten Quadrate an Inhalt gleich ist. Zieht man nämlich noch die Hülfslinien AJ und CG, so haben die beiden Dreiecke ABJ und CBG zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich, nämlich: JB = CB, AB = GB und $\widehat{ABJ} = \widehat{CBG} = (\widehat{ABC} + 90^\circ)$, daher: $\triangle ABJ \cong \triangle CBG$ (§. 34). (Man denke sich das Dreieck CBG um den Punct B gedreht, so fällt der Punct C auf J und G auf A). Das Dreieck ABJ hat nun mit dem Rechteck LKBJ einerlei Grundlinie, BJ, und gleiche Höhe, KB, eben so haben das Dreieck CBG und das Quadrat ABGF einerlei Grund-

---

*) $\overline{BC}^2$ bedeutet so viel als $\overline{BC} \cdot \overline{BC}$, oder das über die Linie $\overline{BC}$ construirte Quadrat.

linie, BG, und gleiche Höhe, AB, daher: (§. 97) △ ABJ = ½ Rechteck KBJL, und △ CBG = ½ Quadrat ABGF. Da nun die beiden Dreiecke ABJ und CBG gleich gross sind, so ist auch: ½ Rechteck KBJL, = ½ Quadrat ABGF, also auch das ganze Rechteck KBJL so gross, als das Quadrat ABGF. Eben so zeigt man an der andern Seite*), indem man die Hülfslinien AH und BD zieht, dass auch das Rechteck CHLK dem Quadrat ACDE an Fläche gleich ist, und folglich auch beide Rechtecke zusammen, d. i. das Quadrat der Hypotenuse, so gross ist, als die Summe der Quadrate der beiden Catheten.**)

Zusatz. Das Quadrat der einen Cathete ist so gross, als das Quadrat der Hypotenuse weniger dem Quadrat der andern Cathete.

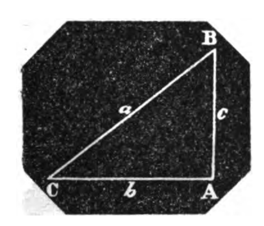
106.

Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, welches 1) so gross ist, als die Summe zweier gegebenen Quadrate, 2) welches so gross ist, als die Differenz derselben, und 3) welches 2, 3, 4 . . mal so gross ist, als ein gegebenes Quadrat.

Auflösung. Siehe §. 45, Randanmerkung.



107.



Dieselbe merkwürdige Beziehung, welche unter den Flächen der, auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehenden Quadrate Statt findet, muss offenbar auch unter den Quadratzahlen dieser Seiten Statt finden, d. h. wenn man die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit einerlei Längeneinheit ausmisst, so muss das Quadrat von der Zahl, welche die Länge der Hypotenuse angiebt,

---

*) Der Anfänger möge sich die Figur grösser zeichnen.

**) Obgleich man eigentlich von keinem Lehrsatz sagen kann, er sei der wichtigste in der Geometrie, indem alle, als Glieder einer Kette, gleich nothwendig sind, so dienen doch einige Sätze nur zur Begründung anderer, von denen mehrere practische Anwendungen gemacht werden können, und in dieser Hinsicht kann man sagen, dass obiger, nach seinem Entdecker Pythagoras benannte Satz, der fruchtbarste und wichtigste in der ganzen Geometrie ist. Wir haben deshalb auch, dem Pythagoras zu Ehren, diesem Satze ein eigenes Buch gewidmet, unter andern Umständen würden wir ihm einen Tempel gebaut haben.

so gross sein, als die Quadrate der beiden Zahlen, welche die Längen der Catheten ausdrücken, zusammen genommen, so dass man also, vermöge dieses Satzes, aus zwei in Zahlen gegebenen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dadurch bestimmte dritte Seite immer berechnen kann.

Wäre z. E. in dem bei A rechtwinkligen Dreieck ABC die eine Cathete AC = 4, die andere AB = 3, so wäre das Quadrat der Hypotenuse = 16 + 9 = 25, folglich die Hypotenuse BC = $\sqrt{25}$ = 5. Bedeutet a die Länge der Hypotenuse, b und c die der Catheten, so ist allgemein:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Man findet also die Hypotenuse, wenn man beide Catheten quadrirt (jede mit sich selbst multiplicirt) und aus der Summe beider Quadrate die Quadratwurzel zieht. Um eine Cathete zu finden, muss man das Quadrat der andern Cathete vom Quadrat der Hypotenuse abziehen und aus dem Reste die Quadratwurzel ziehen (§. 105, Zusatz).

Beispiele: 1) Gegeben: beide Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks, $b = 16'$, $c = 21'$. Gesucht: die Hypotenuse a?

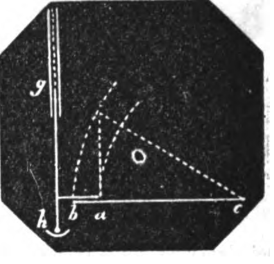
2) Gegeben: die Hypotenuse $a = 34'$, die Cathete $b = 16'$. Gesucht. c?

3) Gegeben: zwei Seiten eines Rechtecks, $h = 13'\ 8''$, $b = 24'\ 9''$. Gesucht: die Diagonale d?

4) Gegeben: die Seite eines gleichseitigen Dreiecks, $b = 30'$. Gesucht: die Höhe h?

5) In den Endpuncten einer graden Linie BC = 100', sind die beiden Perpendikel AB = 60' und DC = 90' errichtet. Wie weit sind die beiden Endpuncte A und D von einander entfernt?

6) Eine Stange, bc, beschreibt um c einen Kreis und hebt dabei eine andere Stange, gh, indem sie dieselbe, unter einem rechtwinklig daran befindlichen Arm, greift. Die Stange gh ist genöthigt, sich zwischen Leisten nach ihrer Längenrichtung zu bewegen. Auf welche Höhe (h) wird dieselbe gehoben, wenn $bc = 2'\ 2''$ und $ab = 4''$ ist?

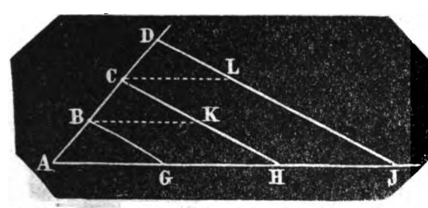


Antwort: 1) $a = 26{,}4\ldots$; 2) $c = 30'$; 3) $d = 28{,}27\ldots$; 4) $h = 25{,}98\ldots$; 5) AD = 104,4...; 6) $h = 13'',9\ldots$

Zehntes Buch.

Von den Proportionallinien.

108.



Lehrsatz. Wenn man auf dem einen Schenkel eines Winkels gleiche Stücke absteckt und durch die Theilpuncte Parallelen an den andern Schenkel zieht, so schneiden diese auch auf dem andern Schenkel gleiche Stücke ab. In Zeichen:

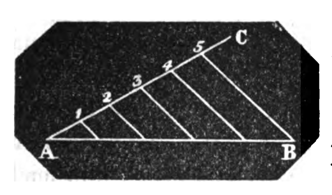
Wenn:	so ist:
$AB = BC = CD = \cdots$	
und $BG \parallel CH \parallel DJ \parallel \cdots$	$AG = GH = HJ = \cdots$

Beweis. Man denke sich BK, CL parallel mit AJ gezogen, so sind die entstehenden Dreiecke gleich, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich:

$AB = BC = CD$, n. V.	folglich ist auch (§. 37):
$\widehat{BAG} = \widehat{CBK} = \widehat{DCL}$	$\triangle ABG \cong \triangle BCK \cong \triangle CDL$
$\widehat{ABG} = \widehat{BCK} = \widehat{CDL}$	und hieraus:
(§. 61, Zusatz, oder §. 64.)	$AG = BK = CL$.

Nun ist aber (§. 92): $BK = GH$ und $CL = HJ$, mithin ist auch: $AG = GH = HJ$.

109.

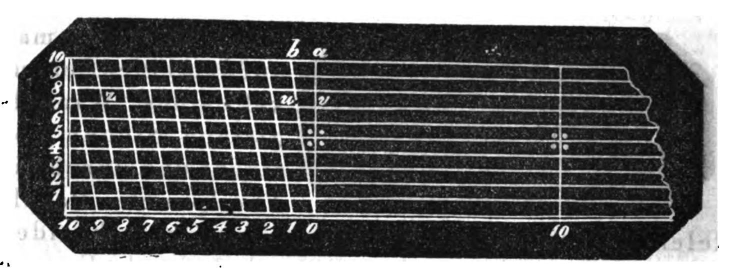


Aufgabe. Eine gegebene Linie, AB, in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen, z. B. in fünf.

Auflösung. Man ziehe aus A eine Linie, AC, stecke auf dieser von A aus fünf gleiche Theile ab, ziehe von dem letzten Theilpunct 5 nach B und dann durch 4, 3, 2, 1 die mit $\overline{5B}$ parallelen Linien, so ist dadurch AB in fünf gleiche Theile getheilt (§. 108).

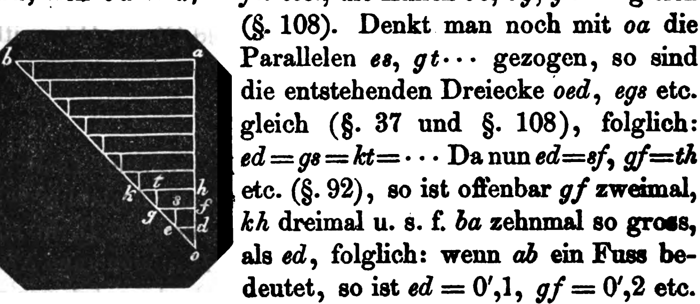
110.

Verjüngter Maassstab. Zur Eintheilung einer graden Linie kann man sich auch eines sogenannten verjüngten Maassstabes bedienen. Ein solcher, besonders bei Entwerfung von Zeichnungen, Charten etc. unentbehrlicher Maassstab, lässt sich folgendermassen leicht anfertigen.



Man trägt nämlich eine beliebige Lineareinheit, $\overline{ab}$, von 0 nach 10, zehnmal ab, dann diese zehn Theile beliebig oft von 0 bis 10, von 10 bis 20 etc., zieht durch den Endpunct ein Perpendikel, nur nach Augenmaass, steckt auf diesem wieder zehn gleiche Stücke ab, zieht durch die Theilpuncte die zehn Parallelen mit $\overline{10,10}$, so wie auch die zehn mit $\overline{9,10}$ parallelen Querlinien, so ist der Maassstab fertig.

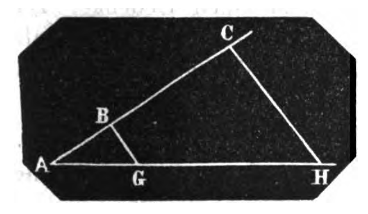
Bedeutet nun in dem Dreieck oab die Linie ab die Einheit, 1 Fuss z. B., so ist, wie folgendes grösser gezeichnete Dreieck es deutlicher zeigt, die neunte, damit Parallele $de = \frac{1}{10}' = 0',1$, die achte Parallele $fg = \frac{2}{10} = 0',2$ etc. Denn erstlich sind, weil $od = df = fh$ etc., die Linien oe, eg, $gk \cdots$ gleich (§. 108). Denkt man noch mit oa die Parallelen es, $gt \cdots$ gezogen, so sind die entstehenden Dreiecke oed, egs etc. gleich (§. 37 und §. 108), folglich: $ed = gs = kt = \cdots$ Da nun $ed = sf$, $gf = th$ etc. (§. 92), so ist offenbar gf zweimal, kh dreimal u. s. f. ba zehnmal so gross, als ed, folglich: wenn ab ein Fuss bedeutet, so ist $ed = 0',1$, $gf = 0',2$ etc.



Der Gebrauch dieses zehntheiligen Maassstabes ist nun leicht einzusehen. Wollte man z. B. eine Länge von 8 Fuss 7 Zoll $= 8',7$ in den Zirkel fassen, so setzt man den einen Zirkelfuss auf die siebente Parallele in v und öffnet den Zirkel so

weit, bis der andere Fuss auf derselben Parallele die achte Querlinie erreicht, so hat man die Linie $vz = 8',7$ im Zirkel (weil $uz = 8'$ und $uv = 0',7$). Die unten stehenden Zahlen der Querlinien geben nämlich die ganzen Einheiten und die an den Parallelen stehenden Zahlen die Zehntel an.

111.



Lehrsatz. Parallelen zwischen den Schenkeln eines Winkels schneiden auf denselben proportionirte Stücke ab.*)

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
BG ‖ CH	AB : BC = AG : GH,

d. h. AB verhält sich eben so zu BC, wie AG zu GH; mit andern Worten: AB ist so oft in BC enthalten, als AG in GH.

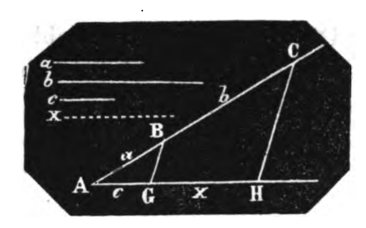
Beweis. Sei, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, AB in BC gerade dreimal enthalten. Denkt man sich dann BC in drei gleiche Theile getheilt und durch die Theilpuncte Parallelen zu BG gezogen, so ist, weil AC in vier gleiche Theile getheilt, auch AH in vier gleiche Theile getheilt (§. 108), mithin auch AG in GH gerade dreimal enthalten. — Wäre AB nicht ganze Male in BC enthalten, wäre z. B. AB = 7 und BC gleich 24, also BC nun $3\frac{3}{7}$ mal so gross, als AB, so kann man sich AB in 7 gleiche Theile und BC in 24 solcher gleichen Theile getheilt, durch die Theilpuncte wieder Parallelen mit GH gezogen denken, so ist dadurch auch AG in 7 und GH in 24 unter sich gleiche Theile getheilt, mithin auch GH dann $3\frac{3}{7}$ mal so gross, als AG.

Beispiel. Es sei AB = 2′ 3″, BC = 5′ 9″, AG = 3′ 9″. Wie gross ist GH?

Antwort. Es ist GH = 9′ 7″.

*) Die Lehre von den Proportionen gehört in die Arithmetik und Algebra und muss hier als bekannt vorausgesetzt werden. S. Algebra §. 322.

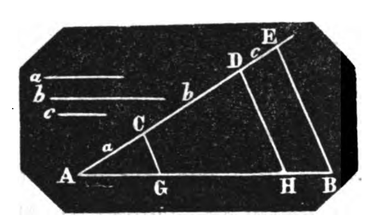
112.



Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien, a, b, c, die vierte Proportionale x durch Construction zu suchen, so dass $a : b = c : x$.

Auflösung. Man zeichne einen beliebigen Winkel, A, stecke auf dem einen Schenkel AB $= a$, BC $= b$ und auf dem andern Schenkel AG $= c$, ab, ziehe BG und dann CH ‖ BG, so ist GH die gesuchte Linie x.

113.

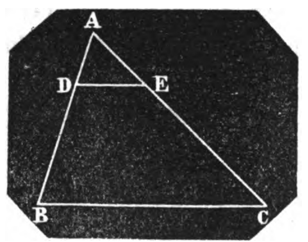


Aufgabe. Eine gegebene Linie, AB, so einzutheilen, dass sich die Theile wie gegebene Linien, a, b, $c \cdots$, verhalten.

Auflösung. Man ziehe aus dem Ende a noch eine Linie, trage auf dieser von A aus, die gegebenen Linien a, b, c ab, so dass AC $= a$, CD $= b$ und DE $= c$ ist, verbinde den letzten Theilpunct E mit B und ziehe dann DH und CG parallel mit EB, so verhalten sich die Theile auf AB, wie die auf AE (§. 111).

Zusatz. Soll eine Linie, AB, in Stücke getheilt werden, die sich wie gegebene Zahlen, z. B. 2, 5, 4, verhalten, so trage man eine beliebige Lineareinheit von A nach C zweimal, von C nach D fünfmal, von D nach E viermal ab, verbinde E mit B und ziehe DH und CG parallel mit EB.

114.



Lehrsatz. Die Linie, welche in einem Dreieck mit einer Seite parallel läuft, schneidet von den beiden andern Seiten die gleichvielsten Theile ab, und umgekehrt, eine Linie, welche von zwei Seiten eines Dreiecks die gleichvielsten Theile abschneidet, ist mit der dritten Seite parallel.

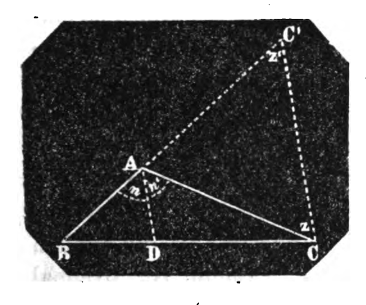
In Zeichen:

Wenn: $DE \parallel BC$ so ist: $AD : AB = AE : AC$.

Beweis. Nach §. 111 ist erstlich $AD : DB = AE : EC$ und da nun eine Linie in sich selbst einmal enthalten ist, so ist nothwendig auch $AD : (AD + DB) = AE : (AE + EC)$, oder was dasselbe ist: $AD : AB = AE : AC$. Wäre z. B. AD in BD dreimal enthalten, so wäre offenbar AD in AB einmal mehr, also viermal enthalten, und eben so AE in AC viermal.

Schneidet umgekehrt eine Linie, DE, von den beiden Schenkeln des Winkels A die gleichvielsten, z. B. von jedem den fünften Theil ab, so muss auch DE parallel mit BC sein, weil nur die mit BC parallele Linie, welche den fünften Theil von AB abschneidet, auch denselben Theil von AC abschneidet.

115.



*) **Lehrsatz.** Die Linie, welche einen beliebigen Winkel eines Dreiecks halbirt, theilt die gegenüber liegende Seite so: dass sich die beiden Theile (Abschnitte) derselben gerade so verhalten, wie die beiden anderen Seiten des Dreiecks.

In Zeichen:

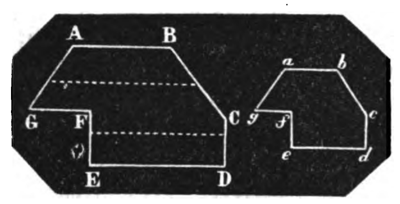
Wenn: $\widehat{n} = \widehat{n'} = \frac{1}{2}\, \widehat{BAC}$ so ist: $BD : DC = AB : AC$.

Beweis. Man denke sich BA verlängert, so dass $AC' = AC$ und verbinde C' mit C, dann ist $z = z'$ (§. 40) und da $n + n' = z + z'$ (§. 66), so ist, weil $n = n'$ und $z = z'$, auch $n' = z$, daher $AD \parallel C'C$ (§. 60) und folglich (§. 111) $BD : DC = AB : AC$, weil $AC = AC'$.

Elftes Buch.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

116.



Erklärung. Zwei Figuren heissen **ähnlich**, wenn sie gleichwinklig sind und die Seiten, so wie sie zwischen gleichen Winkeln liegen, dasselbe Verhältniss zu einander haben. Je zwei solcher Seiten heissen dann **ähnlich liegende.**

Wären z. E. die beiden Figuren ABCD··G und *abc··g* so construirt, dass sie gleichwinklig (A=*a*, B=*b*, ···G=*g*) und die ähnlich liegenden Seiten proportionirt, d. h. wenn AB z. B. dreimal so gross, als *ab* wäre, dann auch jede andere Seite der grösseren Figur dreimal so gross, als die ähnlich liegende Seite der kleinern Figur wäre, nämlich BC dreimal grösser, als *bc*; CD dreimal grösser, als *cd* etc., so wären die beiden Figuren ähnlich, und man kann sie dann auf einerlei Weise construirt denken, die eine nur nach einem kleinern Maassstab. Aehnliche Figuren haben nur verschiedene Grösse, in allem Uebrigen, wie Form, Eigenschaften, sind sie gleich.

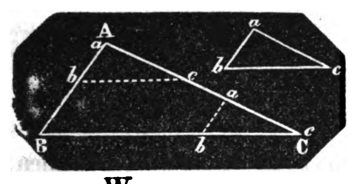
Die zum Begriff der Aehnlichkeit erforderlichen zwei Merkmale, Gleichheit der Winkel und Proportionalität der Seiten, müssen aber, wohl gemerkt, gleichzeitig vorhanden sein, denn es können zwei sehr unähnliche Figuren eins dieser Merkmale ohne das andere gemein haben. Man kann sich z. B. aus der Figur ABC···G, durch die mit AB und ED angedeuteten parallelen Linien, eine andere Figur herausgeschnitten denken, welche vermöge §. 60, Zusatz, noch dieselben Winkel hat, wo das Verhältniss der Seiten aber nicht mehr dasselbe ist. Eben so kann man sich die Seiten der einen Figur ABC···G um die

Eckpuncte (wie um Gewinde) gedreht (verschoben) denken, wobei noch das Verhältniss der Seiten dasselbe bleibt, die Gleichheit der Winkel aber gestört ist.

Nur bei Dreiecken folgt eins dieser zur Aehnlichkeit erforderlichen Merkmale aus dem andern, und, so wie über die Gleichheit (≌) der Dreiecke, haben wir uns hier nun auch über die Aehnlichkeit (∾) derselben die folgenden drei wichtigen Lehrsätze wohl zu merken, weil auf diese alle übrigen, die Aehnlichkeit der Figuren betreffenden, wichtigen Sätze sich gründen, indem alle ähnliche Figuren in Netze von ähnlichen Dreiecken zerlegt werden können.

Anmerkung. Aus der Voraussetzung: $ab : \mathrm{AB} = bc : \mathrm{BC} = cd : \mathrm{CD} =$ etc., folgt: $ab : bc : cd : \cdots = \mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CD} : \cdots$ Statt also zu sagen: zwei Figuren heissen ähnlich, wenn sie gleichwinklig sind und proportionirte Seiten haben, könnte man auch sagen: zwei Figuren heissen ähnlich, wenn die Seiten der einen Figur dieselbe Lage und dasselbe Verhältniss zu einander haben, wie die der andern.

117.



Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie gleichwinklig sind.

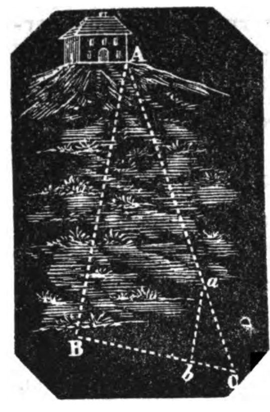
In Zeichen:

Wenn:	so ist nothwendig:
$a = \mathrm{A}$	
$b = \mathrm{B}$	$ab : \mathrm{AB} = ac : \mathrm{AC} = bc : \mathrm{BC}$
$c = \mathrm{C}$	$\triangle\, abc \sim \triangle\, \mathrm{ABC}.$

Beweis. Man denke das kleinere Dreieck übereinstimmend so auf das grosse gelegt, dass zwei gleiche Winkel, a, A, sich decken. Dann ist, weil $\widehat{b} = \widehat{\mathrm{B}}$, die Linie bc parallel mit BC (§. 60, Zusatz), mithin auch (§. 114) $ab : \mathrm{AB} = ac : \mathrm{AC}$.

Denkt man sich nun noch $\widehat{c}$ auf $\widehat{\mathrm{C}}$ gelegt, so ist aus demselben Grunde auch $ac : \mathrm{AC} = bc : \mathrm{BC}$. Aus der Gleichheit der Winkel zweier Dreiecke folgt also die Proportionalität der den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten.

118.



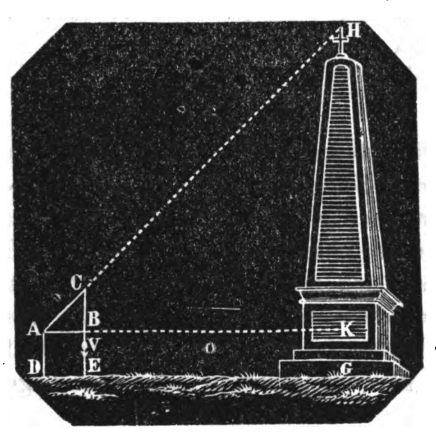
Aufgabe. Die Entfernung eines unzugänglichen Punctes, A, von einem Puncte, B, zu bestimmen.

Auflösung. Mit Hülfe des Winkelkreuzes errichte auf AB in B eine Senkrechte (§. 49, Zusatz 2) und messe auf dieser zwei beliebige Längen, B*b*, *b*C, ab (indem man die Puncte C und *b* mit Messstangen bezeichnet). Auf BC errichte wiederum eine Senkrechte in *b* und bezeichne den Endpunct *a* dieses Perpendikels so, dass er mit C und A in einerlei Richtung ist, und messe dann noch die Linie *ab*, so kann man die Länge von AB durch eine einfache Proportion finden.

Nach Construction ist nämlich: $\triangle abC \sim \triangle ABC$ (§. 117), daher: $bC:BC = ab:AB$. Hätte man z. B. $BC = 150'$, $bC = 50'$, $ab = 100'$, so wäre $50:150 = 100:x$ und folglich $x = \frac{100 \cdot 150}{50}$ oder $x = 300' = AB$.

119a.

Aufgabe. Die Höhe eines Thurmes (Baumes) zu bestimmen.



Auflösung. In einerlei Richtung und parallel mit HG stecke in D und E zwei Messstangen ein, lege daran eine dritte Messstange so, dass, wenn man über dieselbe hin visirt, die Visirlinie durch den Punct H geht, messe dann DG, DE, AD und CE, so kann man (AK ‖ DG gedacht) durch eine einfache Proportion, HK, berechnen, welche, zu AD addirt, die gesuchte Höhe giebt.

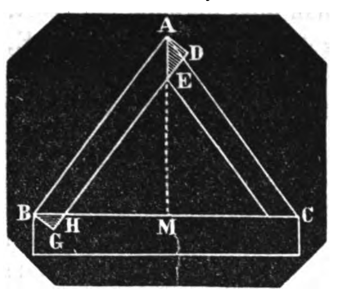
Nach Construction ist $\triangle ABC \sim \triangle AKH$ (§§. 117 und 61, Zusatz). Wäre z. B. gemessen $DG = 100'$, $DE = 5'$, $AD = 6'$, $CE = 10'$, also $BC = CE - AD = 4'$, so hat man (§. 117): $AB : AK = BC : KH$, oder, indem man die Zahlen setzt: $5 : 100 = 4 : x$, woraus $x = \frac{4 \cdot 100}{5} = 80 = HK$, mithin $HG = 80 + 6 = 86'$.

Zusatz. Viel bequemer kann man die Höhen zugänglicher Gegenstände messen, indem man sich zu diesem Zweck ein rechtwinkliges Dreieck, ABC, verfertigt, dessen Catheten, AB, BC, gleich lang sind. Dieses Dreieck kann man entweder frei in der Hand halten, oder noch besser an einem Stab, AD, befestigen und dann leicht in eine solche Lage bringen, dass die Cathete CB mit dem in C befestigten Senkblei CV zusammenfällt, also vertical und mit HG parallel wird. Hat man sich nun mit diesem einfachen Instrument so weit vom Gegenstande HG entfernt, bis man durch Visiren wahrnimmt, dass die Hypotenuse AC genau auf die Spitze H zielt, so messe man nur (durch Abschreiten) die Linie DG und addire hiezu die Höhe des Auges AD, so hat man HG, denn weil nach Voraussetzung $AB = BC$, $\widehat{B} = 90^\circ$, also $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{H} = 45^\circ$, so ist auch $KH = AK = DG$, mithin $HG = DG + AD$. Forstmänner messen auf diese Weise die Höhen der Bäume.

119 b.

Aufgabe. Zwei gleich lange viereckige Balken, $AB = AC = 10'$, sollen über einen dritten, $BC = 12'$, dachförmig aufgerichtet werden. Damit die Balken nun genau an einander passen, muss offenbar erst von beiden gleich langen Balken, AB, AC, oben ein dreieckiges Stück, ADE, und unten ein dreieckiges Stück, BGH, nach den Linien AE und BH abgesägt werden. Um nun diese Richtungen AE und BH zuvor angeben zu können, kommt es nur darauf an, die Puncte E und H zu

bestimmen, oder die Längen DE und GH zu berechnen. Wie findet man diese, wenn die Breite AD = BG = 1' ist?



Auflösung. Zuerst hat man die Höhe $AM = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8'$ (§. 107). Ferner sind die Dreiecke AED und ABM ähnlich, denn jedes hat einen rechten Winkel (D = M), dann ist $\widehat{AED} = \widehat{BAM}$ (§. 61, Zusatz), also auch $\widehat{EAD} = \widehat{ABM}$ (§. 65, Zusatz 3); mithin (§. 117):

$$DE : AD = AM : BM$$

$$\text{oder } DE : 1 = 8 : 6$$

$$\text{und hieraus: } DE = \frac{8 \cdot 1}{6} = 1\tfrac{1}{3}' = 16''.$$

$$\text{Ferner ist } \triangle BGH \sim \triangle ABM$$

$$\text{daher } GH : BG = BM : AM$$

$$GH : 1 = 6 : 8$$

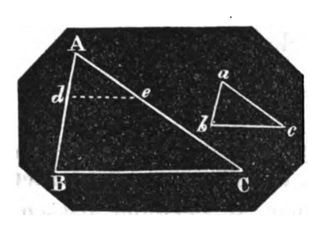
$$\text{folglich: } GH = \tfrac{6}{8}' = 9''.$$

120.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten proportionirt sind.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
$ab : AB = ac : AC = bc : BC$,	$A = a,\ B = b,\ C = c.$



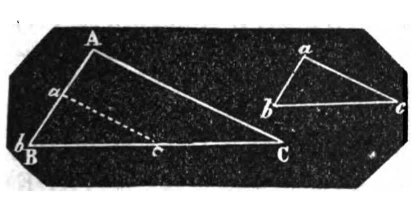
Beweis. Dieser Satz ist die Umkehrung von §. 117. Um die Richtigkeit an einem bestimmten Beispiel zu zeigen, mögen die Seiten des grössern Dreiecks dreimal so gross, als die des kleinern sein. Denkt man sich nun auf AB ein Stück, $Ad = ab$, abgeschnitten und $de \parallel BC$ gezogen, so ist $\triangle Ade \sim \triangle ABC$ (§. 117). Weil nun $Ad = ab$ der dritte Theil von AB, so ist auch Ae der dritte Theil von AC und de der dritte Theil von BC, mithin $Ae = ac$, $de = bc$, daher $\triangle Ade \cong \triangle abc$, also auch $\triangle abc \sim \triangle ABC$, $a = A$, $b = B$, $c = C$.

121.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei proportionirte Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel gleich haben.

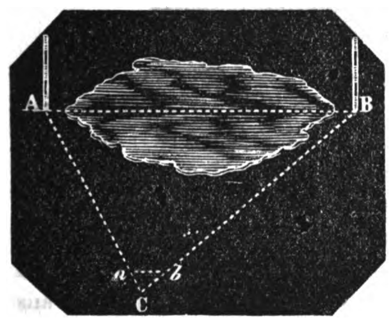
In Zeichen:

Wenn:	so ist:
$\hat{b} = \hat{B}$	
$ab : AB = bc : BC,$	$\triangle abc \sim \triangle ABC.$



Beweis. Denkt man das kleinere Dreieck so auf das grössere gelegt, dass die als gleich vorausgesetzten Winkel b und B sich decken und ab auf AB, also bc auf BC fällt, so muss, weil vermöge Voraussetzung $ab : AB = bc : BC$, die Linie ac parallel mit AC sein (§. 114), folglich $a = A$, $c = C$ (§. 61, Zusatz); die Dreiecke sind also gleichwinklig, folglich ähnlich.

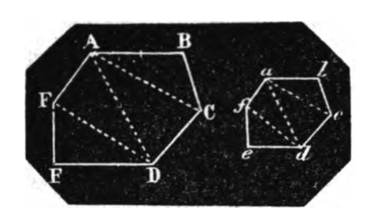
122.



Aufgabe. Den Abstand zweier Puncte, A und B, auf kürzere Weise zu bestimmen, als in §. 36 gelehrt.

Auflösung. Man bezeichne einen dritten Punct, C, messe die Linien AC und BC, trage von beiden die gleichvielsten Theile nach b und a ab, so dass, wenn z. B. bC der zehnte Theil von BC, dann auch ac der zehnte Theil von AC ist, alsdann muss ab der ebensovielste Theil von AB sein (§. 121). Misst man also noch ab und multiplicirt diese Länge mit 10, so hat man AB.

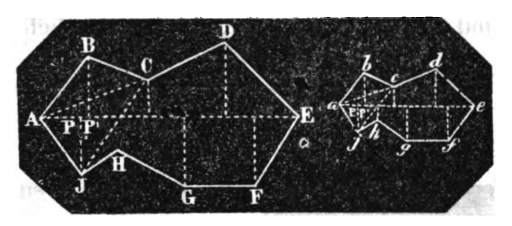
123.



Lehrsatz. Aehnliche Figuren können in ähnliche Dreiecke zerlegt werden, und je zwei ähnlich liegende Diagonalen verhalten sich wie zwei ähnlich liegende Seiten.

Beweis. Seien die beiden Figuren $abc \cdot \cdot f$ und $ABC \cdot \cdot F$ ähnlich (§. 116). Dann ist zuerst $\triangle abc \sim \triangle ABC$, weil nach Voraussetzung $\widehat{b} = \widehat{B}$ und $ab : AB = bc : BC$, folglich (§. 121) auch $ac : AC = ab : AB$ und $\widehat{acb} = \widehat{ACB}$, und da nach Voraussetzung $\widehat{bcd} = \widehat{BCD}$, so ist nach Abzug der Winkel acb und ACB auch: $\widehat{acd} = \widehat{ACD}$. Ferner ist nun auch $\triangle acd \sim \triangle ACD$, weil $\widehat{acd} = \widehat{ACD}$ und $ac : AC = cd : CD$, daher auch (§. 121) $ad : AD = cd : CD$. Eben so zeigt man, dass $\triangle adf \sim \triangle ADF$, $\triangle fde \sim FDE$.

124.



Aufgabe. Ueber eine gegebene Linie, ab, eine Figur zu construiren, welche einer andern Figur, $ABC \cdots J$, ähnlich ist.

Auflösung 1. Man denke sich die Figur $ABC \cdot \cdot J$ in zusammenhängende Dreiecke zerlegt, trage dann an die Bildseite ab die Winkel $cab = CAB$ und $cba = CBA$, so ist $\triangle abc \sim \triangle ABC$ (§§. 117 und 65, Zusatz 3); an die Seite ac trage man nun die Winkel $caj = CAJ$, $acj = ACJ$, so ist auch $\triangle acj \sim \triangle ACJ$. Auf diese Weise müsste man zwar, wie aus §. 123 folgt, eine ähnliche Figur erhalten, weil jedoch das viele Winkelzeichnen zu umständlich und unsicher, so ist dieses Verfahren practisch nicht anwendbar.

2. Hat man einen sogenannten Reductionszirkel, d. i. ein Doppelzirkel, dessen Gewinde, in beiden Schenkeln zugleich,

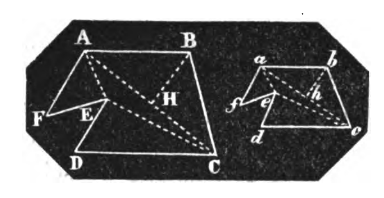
verschiebbar, durch eine Schraube festgestellt und mithin die Länge des einen Schenkelpaars in jedem beliebigen Verhältniss zum andern verkürzt werden kann, so stelle man zuerst diesen Zirkel so: dass, wenn man mit dem einen Schenkelpaar die Originalseite AB fasst, das andere Paar Schenkel die Bildseite *ab* zwischen seinen Spitzen enthält. Hierauf zeichne man alle Dreiecke der Figur ABC···J so ab: dass man mit dem ersten Schenkelpaar die Seiten der Originaldreiecke abnimmt und mit dem andern Schenkelpaar (umgewandten Zirkel), welches dann jedesmal die ähnlich liegende (reducirte) Seite fasst, zeichnet; alsdann muss die zweite Figur der ersten ähnlich werden (§. 120), denn je zwei gleichzeitig zwischen beiden Schenkelpaaren enthaltenen Linien verhalten sich immer wie die Längen der Schenkel (§. 121). Enthält die Figur krumme Linien, so muss man diese durch einzelne Puncte, je mehr, je besser, bestimmen und diese Puncte durch einen freien Handzug verbinden (vergl. §. 43).

3. In vielen Fällen ist es bequemer, statt die ähnlich abzubildende Figur in Dreiecke zu zerlegen, innerhalb oder ausserhalb derselben eine schickliche Grundlinie, hier z. B. AE, anzunehmen, auf diese von allen Ecken Perpendikel, JP, BP′ etc., zu fällen, dann mit dem, zuvor richtig gestellten Reductionszirkel die Grundlinie AE zu fassen und ihre durch den Zirkel reducirte Länge in *ae* abzustecken, hierauf dann die reducirten Längen von AP, AP′··· (Abscissen) nämlich *ap*, *ap′*··· abzustecken. Durch die Endpuncte *p*, *p′*··· ziehe man Perpendikel auf *ae* und trage auf diese Perpendikel die reducirten Längen der Perpendikel (Ordinaten) JP, BP···, nämlich *jp*, *bp*··· ab etc.

4. Statt eines Reductionszirkels kann man sich auch eben so gut eines verjüngten Maassstabes bedienen. Man misst dann nach einem solchen Maassstabe alle Dreiecksseiten der ähnlich nachzubildenden Figur oder die Perpendikel AP, AP′·· JP, BP′·· (Abscissen und Ordinaten), dividirt oder multiplicirt ihre Längen mit der Reductionszahl, welche angiebt, wie viel mal die Seiten der Abbildung kleiner oder grösser sein sollen, als die des Originals, und trägt dann die gefundenen Zahlen, von demselben Maassstabe abgenommen, gehörig auf. — Construirt man noch einen zweiten Maassstab, auf welchem die Einheit so viel mal kleiner oder grösser ist, als die bestimmte

Reductionszahl vorschreibt, so kann man, ohne erst dividiren oder multipliciren zu brauchen, die nach ersterem Maassstab gemessenen Längen unmittelbar vom zweiten abmessen.

125.



Lehrsatz. Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie zwei ähnlich liegende Seiten, ihre Inhalte aber wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

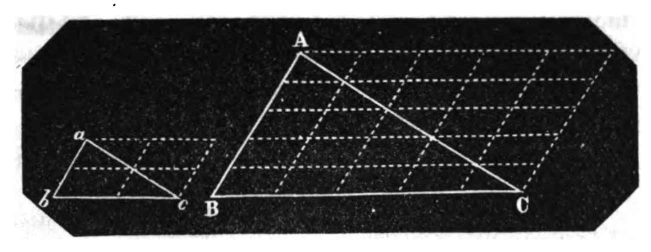
Ist $abc \cdots f \sim ABC \cdots F$ und bedeuten u, U die Umfänge, f und F die Flächeninhalte, so ist, in Zeichen:

$$1) \; u : U = ab : AB$$
$$2) \; f : F = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Beweis. Sei, um zuerst ein bestimmtes Beispiel zu haben, das Verhältniss der ähnlich liegenden Seiten wie 1 zu 3, d. h. jede Seite der grössern Figur sei dreimal so gross, als die ähnlich liegende der kleinern, alsdann ist offenbar auch die Summe aller Seiten der grössern Figur, d. i. ihr Umfang, dreimal so gross, als der Umfang der kleinern Figur. Verhielten sich die ähnlich liegenden Seiten wie 3 : 7, d. i. wie $1 : 2\frac{1}{3}$, so wäre der Umfang der grössern Figur $2\frac{1}{3}$ mal so gross als der Umfang der kleinern.

2. Der zweite Theil des Lehrsatzes muss zuerst für zwei ähnliche Dreiecke bewiesen werden.*) Seien deshalb abc, ABC zwei ähnliche Dreiecke, deren Seiten sich z. B. wie 2 zu 5 verhalten mögen. Denkt man sich die Seiten bc und ab jede in 2 und BC und AB jede in fünf gleiche Theile getheilt,

*) Am kürzesten ist der Beweis folgendermaassen: Die Perpendikel bh, BH gefällt, hat man $\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$ oder $\frac{\frac{1}{2} AC}{\frac{1}{2} ac} = \frac{BC}{bc}$ und $\frac{BH}{bh} = \frac{BC}{bc}$; die beiden letztern Gleichungen mit einander multiplicirt: $\frac{\frac{1}{2} AC \cdot BH}{\frac{1}{2} ac \cdot bh} = \frac{BC \cdot BC}{bc \cdot bc}$ oder $\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2}$ etc. (§. 102.)



so sind die Theile auf bc und BC einander gleich und eben so die auf ab und AB. Denkt man sich nun die Dreiecke zu Parallelogrammen ergänzt, durch die Theilpuncte auf bc und BC Parallelen mit ab, AB und durch die Theilpuncte auf ab und AB Parallelen mit bc, BC gezogen, so wird dadurch offenbar das eine Parallelogramm in $2 \cdot 2 = 4$ und das andere in $5 \cdot 5 = 25$ Parallelogramme getheilt, welche alle einander gleich sind. Da sich nun die Inhalte beider Parallelogramme wie 4 zu 25 verhalten, so müssen sich auch ihre Hälften, d. i. die Inhalte der ähnlichen Dreiecke abc und ABC wie 4 zu 25 verhalten, mithin der Inhalt des Dreiecks $ABC = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ mal so gross sein, als der Inhalt von abc. Verhielten sich die Seiten zweier ähnlichen Dreiecke wie 1 zu 4, so verhalten sich ihre Inhalte wie 1 zu 16 etc. Aehnliche Figuren kann man nun in ähnliche Dreiecke zerlegt denken. Verhielten sich nun die Seiten zweier ähnlichen Figuren, $abc \cdots f$ und $ABC \cdots F$, z. B. wie 1 zu 3, so wäre offenbar jedes Dreieck der grössern Figur 9 mal so gross, als ein ähnliches der kleinern, und folglich wäre dann auch die Summe aller Dreiecke der grössern Figur, d. i. ihr Inhalt 9 mal so gross, als der der kleinern. Verhielten sich die Seiten wie 2 : 7, so verhalten sich die Inhalte wie 4 : 49 und so bei jedem andern Zahlenverhältniss.

Aufgabe 1. Die ähnlich liegenden Seiten verhalten sich wie 2 : 5, der Inhalt der kleinern Figur ist $f = 560'\square$. Wie gross ist der Inhalt F der grössern?

Aufgabe 2. Der Inhalt der kleinern Figur sei $= 400'\square$, ihre Grundlinie $= 13'$. Wie gross muss die Grundlinie x einer ähnlichen Figur genommen werden, damit der Inhalt derselben $= 800'\square$?

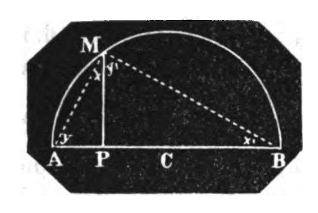
Antw. 1. Aus der Proportion $560 : F = 2^2 : 5^2$ folgt $F = 3500'\square$.

Antw. 2. Aus $13^2 : x^2 = 400 : 800$ folgt $x = 13\sqrt{2} = 18{,}38 \cdots$

Zwölftes Buch.

Proportionen beim Kreise.

126.



Lehrsatz. Das Perpendikel MP von einem beliebigen Punct der Peripherie auf den Durchmesser ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten AP und PB des Durchmessers.*)

In Zeichen:

$$AP : MP = MP : PB.$$

Beweis. Zieht man die beiden Sehnen AM, BM, so entstehen dadurch drei ähnliche Dreiecke**), denn weil $\widehat{AMB} = R$ (§. 81) und nach Voraussetzung $\widehat{MPB} = R$, so ist $x + y' = x + y = x' + y' = R$, also $y = y'$ und $x = x'$, daher $\triangle APM \sim \triangle BPM \sim \triangle AMB$. Da nun in ähnlichen Dreiecken die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten proportionirt sind (§. 117), so folgt aus den beiden kleinern Dreiecken die im Lehrsatz behauptete Proportion $AP : MP = MP : PB$.

---

*) Wenn in einer Proportion die beiden innern Glieder gleich sind, wie in $2 : 6 = 6 : 18$, so heisst die Proportion eine **stetige** und eins der gleichen mittlern Glieder die **mittlere Proportionale** zu den beiden äussern; so ist hier z. B. 6 die mittlere Proportionale zu 2 und 18.

**) Der Anfänger wird wohl thun, diese drei Dreiecke getrennt zu zeichnen.

Zusatz 1. Vergleicht man jedes der kleinern Dreiecke mit dem grossen, so ergiebt sich noch ein anderer wichtiger Satz, nämlich: jede der beiden Sehnen ist die mittlere Proportionale zwischen dem anliegenden Abschnitt des Durchmessers und dem ganzen Durchmesser, denn weil $\triangle APM \sim \triangle AMB$, so ist (§. 117):

$$AP : AM = AM : AB$$

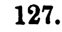
und weil $\triangle BPM \sim \triangle AMB$, so ist auch

$$PB : BM = BM : AB.$$

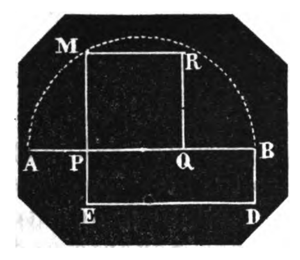
Zusatz 2. Aus den beiden letztern Proportionen folgt noch ein anderer und zwar arithmetischer Beweis für den Pythagoräischen Lehrsatz. Man hat nämlich $AP \cdot AB = \overline{AM}^2$; $PB \cdot AB = \overline{BM}^2$, mithin beide Gleichungen addirt und bemerkt, dass $AP \cdot AB + PB \cdot AB = (AP + PB) \cdot AB$, oder $\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$.

Aufgabe. Es sei $AP = 9$, $PB = 16$. Wie gross ist MP?

Antwort. Es ist $MP = \sqrt{144} = 12$.



127.



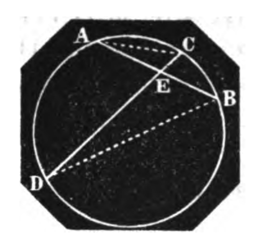
Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, welches so gross ist, als ein gegebenes Rechteck, mit anderen Worten: ein gegebenes Rechteck, PBDE, in ein an Inhalt gleiches Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Es kommt nur darauf an, zu den beiden gegebenen Seiten des Rechtecks PE und PB die mittlere Proportionale x zu finden, so dass $PE : x = x : PB$, denn dann ist $x^2 = PE \cdot PB$. (§. 99.)

Man füge also PE gradlinigt an PB, so dass $AP = PE$, beschreibe über AB, als Durchmesser, einen Halbkreis, errichte in P auf AB das Perpendikel MP, so ist das über dieses Perpendikel construirte Quadrat MPQR das verlangte, weil nach §. 126 $\overline{MP}^2 = AP \cdot PB = PE \cdot PB$.

Zusatz. Um ein Quadrat zu zeichnen, welches beliebig vielmal, z. B. $2\frac{3}{4}$ mal, so gross ist, als ein gegebenes Quadrat, mache man die eine Seite desselben $2\frac{3}{4}$ mal so lang und verwandele das erhaltene Rechteck in ein Quadrat.

128.



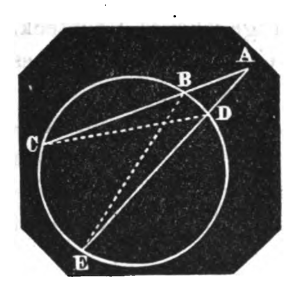
*) **Lehrsatz.** Wenn zwei Sehnen im Kreise sich schneiden, so ist das Product aus den beiden Abschnitten der einen Sehne gleich dem Product aus den beiden Abschnitten der andern Sehne.

In Zeichen:

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

Beweis. Man ziehe die Hülfslinien AC und BD, so sind die beiden entstehenden Dreiecke gleichwinklig und folglich ähnlich, denn nach §. 80 ist $\hat{A} = \hat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2}$ und $\hat{C} = \hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2}$. Daher (§. 117) $\triangle AEC \sim \triangle BED$. Setzen wir nun ähnlich liegende Seiten in Proportion, so ist: $AE:DE = CE:BE$ und hieraus: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Wäre z. B. $AE = 4'$, $EB = 3'$, $CE = 2'$, so müsste $DE = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6'$ sein.

129.



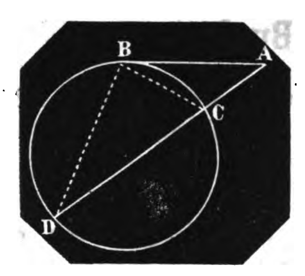
*) **Lehrsatz.** Wenn zwei Sekanten (verlängerte Sehnen) sich ausserhalb des Kreises schneiden, so sind die Producte aus jeder ganzen Sekante und ihrem ausserhalb liegenden Theile gleich.

In Zeichen:

$$AC \cdot AB = AE \cdot AD.$$

Beweis. Denkt man sich die Hülfslinien CD und BE gezogen, so sind die beiden Dreiecke ADC und ABE ähnlich; beide haben nämlich den Winkel A gemein und dann die auf demselben Bogen BD stehenden Peripheriewinkel C und E gleich (§. 80). Die ähnlichen Dreiecke geben nun die Proportion $AD : AB = AC : AE$ und hieraus $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

130.



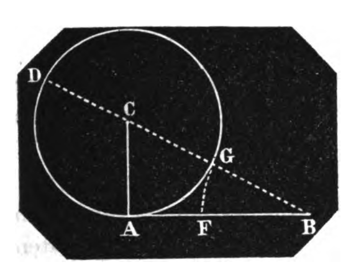
Lehrsatz. Wenn man von einem Punct, A, ausserhalb des Kreises eine Tangente, AB, und eine Sekante, AD, zieht, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zu der ganzen Sekante und ihrem ausserhalb liegenden Theile.

In Zeichen:

$$AC : AB = AB : AD.$$

Beweis. Zieht man die Hülfslinien BC und BD, so ist $\triangle ABC \sim \triangle ADB$, denn beide haben den Winkel A gemein und dann, nach §. 84, $\hat{D} = \widehat{ABC}$, daher (§. 117) $AC : AB = AB : AD$.

131.



*) **Aufgabe.** Eine gegebene Linie, AB, in stetiger Proportion, nämlich so in F zu theilen, dass sich der kleinere Theil AF zum grössern BF verhält, wie dieser zur ganzen Linie AB.

Auflösung. In dem einen Endpunct A errichte auf AB eine Senkrechte $AC = \frac{1}{2} AB$, beschreibe aus C mit CA einen Kreis, ziehe BC, welche den Kreis in G schneidet, mache $BF = BG$, so ist F der verlangte Theilungspunct.

Beweis. Verlängere BC nach D, so ist (§. 130):

$$BG : AB = AB : BD$$

also auch: $BG : (AB - BG) = AB : (BD - AB)$,
oder weil: $BG = BF$, so ist: $AB - BG = AF$; ferner weil: $CA = \frac{1}{2} AB$, mithin: $BD = BG + AB$, und folglich: $BD - AB = BG = BF$, so ist:

$$BF : AF = AB : BF,$$

also auch: $AF : BF = BF : AB$.

Dreizehntes Buch.

Von den regelmässigen Vielecken. Berechnung des Umfangs und Inhalts des Kreises.

132.

Erklärung. Ein Vieleck heisst regelmässig, wenn es gleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

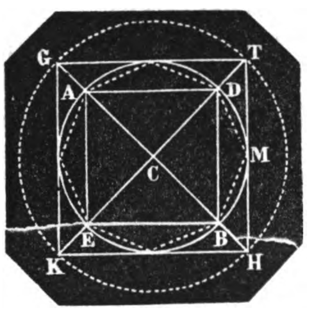
Denkt man sich einen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Bögen getheilt, so würden die dazu gehörenden Sehnen, so wie auch die Peripheriewinkel, welche je zwei Sehnen mit einander bilden, gleich und somit das dadurch entstehende Vieleck, der Erklärung gemäss, ein regelmässiges sein.

Könnte man also einen Kreis in jede beliebige Anzahl gleicher Bögen theilen, so könnte man auch, indem man nur die Sehnen zöge, ein jedes regelmässige Vieleck von beliebiger Seitenzahl zeichnen.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe aber ist auf streng geometrische Weise, d. h. nicht durch Probiren, sondern durch, auf bestimmte Gesetze und Regeln gegründete Construction, bis jetzt noch keinem Mathematiker gelungen und diese Aufgabe: ein beliebiges regelmässiges Vieleck von bestimmter Seitenzahl zu construiren, gehört daher zu den bis jetzt noch ungelösten.

In folgenden wenigen Fällen jedoch, wo der Kreis in 3, 4, 5, 15, so wie in die durch wiederholtes Verdoppeln dieser Zahlen angegebenen gleichen Theile getheilt werden soll, ist die Auflösung möglich.

133.



Aufgabe. Einen Kreis in vier gleiche Theile zu theilen, und ein regelmässiges Viereck zu construiren.

Auflösung. Man ziehe zwei auf einander senkrechte Durchmesser, so theilen diese den Kreis in vier gleiche Bögen. Zieht man die Sehnen, so hat man auch das

regelmässige Viereck ADBE, welches offenbar ein Quadrat ist. Der Beweis ist leicht.

Zusatz 1. Um ein regelmässiges Viereck um den Kreis zu beschreiben, dessen Seiten mit den des eingeschriebenen parallel sind, halbire man einen der Bögen in M (§. 71), ziehe durch M eine Tangente, welche die verlängerten Radien CD, CB in T und H schneidet, dann ist HT eine Seite des umgeschriebenen Vierecks, welche man nur in dem mit CT beschriebenen zweiten Kreise herumzutragen braucht.

Zusatz 2. Durch fortgesetztes Halbiren der Bögen erhält man die regelmässigen Vielecke von 8, 16, 32,··· Seiten.

134.



Aufgabe. Einen Kreis in sechs gleiche Theile zu theilen und ein regelmässiges Sechseck zu zeichnen.

Auflösung. Man trage von einem Punct, A, aus, den Radius CA, als Sehne, unmittelbar in der Peripherie herum, AB, BD etc., so erreicht man beim sechstenmaligen Absetzen den Punct A wieder und die Aufgabe ist gelöst.

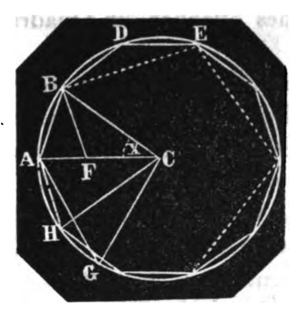
Beweis. Um zu zeigen, dass der Radius AC=AB wirklich die Seite des Sechsecks ist, denke man noch BC gezogen, so folgt aus dem gleichseitigen und folglich auch gleichwinkligen Dreieck ABC, dass $\hat{C}=60°$ (§. 65, Zusatz 2), folglich ist $\hat{C}$ der sechste Theil von 360°, also auch der über dem Radius AB ausgespannte Bogen $\widehat{AB}$ der sechste Theil vom Kreise.

Zieht man BE, BG, EG, so erhält man das regelmässige Dreieck im Kreise, und durch fortgesetztes Halbiren der Bögen die regelmässigen Vielecke von 12, 24, 48, ·· Seiten.

135.

*) **Aufgabe.** In einem Kreise ein regelmässiges Zehneck zu zeichnen.

Auflösung. Man theile den Radius AC in stetiger Proportion (§. 131), so ist der grössere Theil FC die Seite des Zehnecks.



Beweis. Nimmt man AB=FC, zieht BF und BC, so kann man zeigen, dass der Winkel x wirklich der zehnte Theil von vier Rechten oder $= \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ und folglich AB=FC die Seite des Zehnecks ist. Denn nach Voraussetzung ist AF:FC=FC:AC, also, weil AB=FC, auch: AF:AB=AB:AC. Die beiden Dreiecke ABF und ABC haben also, ausser dem gemeinschaftlichen Winkel A, zwei ihn einschliessende proportionirte Seiten und sind folglich ähnlich (§. 121). Denkt man sich das kleinere Dreieck ABF um AF gedreht und in dieser umgekehrten Lage so wieder au ABC gelegt, dass der Winkel A sich selbst deckt und die proportionirten Schenkel einerlei Lage haben, also AF auf AB und AB auf AC fällt, dann würde BF parallel mit BC sein (§. 121), mithin ist $\widehat{ABF} = x$ und $\widehat{AFB} = \widehat{ABC} = \widehat{BAC}$, daher BF=AB=FC, also auch $\widehat{FBC} = x$ (§. 40), ferner $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 2x$. Die drei Winkel des Dreiecks ABC betragen also zusammen $5x = 180^\circ$, daher $x = 36^\circ$. Ist nun BD=DE=AB, so ist BE die Seite des regelmässigen Fünfecks. Man kann also ein regelmässiges Vieleck von 5, 10, 20, 40, 80 ··· Seiten zeichnen. (§. 195, Anmerkung.)

Zusatz. Ist AG die Seite des regelmässigen Sechsecks, AH die des Zehnecks, so ist $\widehat{HCG} = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ = \frac{360^\circ}{15}$, folglich GH die Seite des regelmässigen Fünfzehnecks. Man kann also auch noch regelmässige Vielecke von 15, 30, 60 ··· Seiten zeichnen.

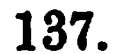
136.

Aufgabe 1. Den rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen. (NB. Der rechte Winkel ist, ausser den durch stetes Halbiren daraus abgeleiteten Winkeln von 45°, $22\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{4}$ ···, der einzige, bei dem die Dreitheilung durch Construction bewirkt werden kann.)

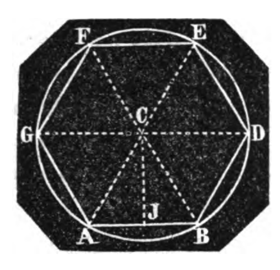
Aufgabe 2. In einem Kreise drei andere gleiche Kreise zu beschreiben, die sich unter einander und zugleich auch den gegebenen Kreis berühren.

Auflösung 1. Beschreibe zwischen den Schenkeln des rechten Winkels einen Bogen und trage darin von beiden Endpuncten aus den Radius als Sehne ab, verbinde die Endpuncte beider Sehnen mit dem Mittelpunct, so ist dadurch die Dreitheilung vollbracht (§. 134).

Auflösung 2. Beschreibe um den gegebenen Kreis ein regelmässiges Dreieck (§. 134 und §. 133, Zusatz 1), verbinde dessen Eckpuncte mit dem Mittelpunct und beschreibe in jedem der entstandenen drei Dreiecke einen Kreis.



137.



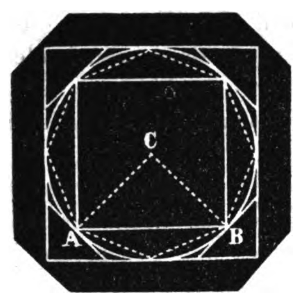
Lehrsatz. Die Fläche eines regelmässigen Vielecks ist so gross, als die eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks und dessen Höhe gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises, d. i. gleich dem vom Mittelpunct auf eine der Seiten gefällten Perpendikel CJ ist.

Beweis. Denkt man nach allen Eckpuncten die Radien CA, CB, CD··· gezogen, so erhält man eben so viele Dreiecke als das regelmässige Vieleck Seiten hat. Weil nun die Höhen dieser Dreiecke, nämlich die vom Mittelpunct auf die Seiten gefällten Perpendikel alle gleich sind (nämlich = CJ = dem Radius des dem regelmässigen Vieleck eingeschriebenen Kreises), so kann man die Grundlinien gradlinigt an einander gelegt denken und erhält dann ein einziges Dreieck von der Höhe CJ und dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks ist. Arithmetisch ist der Beweis viel kürzer, es ist nämlich der Inhalt $F = \frac{1}{2}CJ \cdot AB + \frac{1}{2}CJ \cdot BD + \cdots = \frac{1}{2}CJ(AB + BD + \cdots + GA)$.

Zusatz. Auch der Inhalt eines um den Kreis beschriebenen regelmässigen Vielecks ist offenbar gleich der Fläche eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.

137a.

Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Kreises ist so gross, als der eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.



Beweis. Man denke sich regelmässige Vielecke von beliebiger, aber gleicher Seitenzahl, eins in, eins um den Kreis beschrieben, so ist offenbar der Inhalt des innern kleiner, der des äussern grösser, als der des Kreises. Denkt man sich nun die Seitenzahl beider Vielecke immerfort verdoppelt, indem man die jedesmaligen Bögen in Gedanken halbirt, so wird mit jeder folgenden Verdoppelung der Seitenzahl der Kreis in immer engere Grenzen eingeschlossen. Man sieht nämlich, dass nach jeder Verdoppelung der Seitenzahl der Inhalt eines jeden der beiden Vielecke dem des Kreises immer näher rückt und deshalb ihr Flächenunterschied immer kleiner wird. Könnte man nun durch fortgesetztes Verdoppeln der Seitenzahl beide Vielecke so nahe zusammenrücken lassen, dass ihr Flächenunterschied = 0 würde, so müssten beide Vielecke nothwendig mit einander und mit dem Kreise ganz zusammen fallen. Bei der wirklichen Ausführung dieser Verdoppelung der Seitenzahl, z. B. 4, 8, 16, 32 ··· hätten wir allerdings eine unendliche Reihe von Vielecken zu beschreiben und deshalb eine, dem ersten Anschein nach, nie aufhörende Halbirung des jedesmaligen Bogens einer Vielecksseite oder des ihr entsprechenden Centriwinkels vorzunehmen, und das wäre allerdings eine endlose, folglich unmögliche Arbeit. Dessenungeachtet können wir sie aber doch als vollendet denken, ja sie in Gedanken (worauf es hier nur ankommt) selbst schnell vollenden, indem wir uns vorstellen: der Radius CB drehe sich um den Mittelpunct, um den Winkel BCA zu beschreiben, alsdann beschreibt er erst offenbar die Hälfte dieses Winkels, dann von der übrig bleibenden Hälfte wiederum die Hälfte u. s. w., bis er auf CA fällt, und somit die Unzahl von Halbirungen durchlaufen und die nur endlos scheinende Arbeit wirklich vollbracht hat.*)

Bevor nun aber dieses geschehen, ehe nämlich die immer kleiner werdenden Seiten bis zu Elementen verschwinden und die Vielecke selbst zusammen fallen, sich in stetig gebrochene

---

*) Wegen dieses für Anfänger epineusen Satzes vergleiche man Algebra §. 329.

Linien (Kreis) verwandeln, ist immer so nahe an der Grenze (dem Kreise) als man will, der Inhalt eines jeden Vielecks so gross, als ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises ist, mithin muss dieser Satz auch in ihrer grössten Nähe, für die Grenze, das ist für den Kreis selbst gelten. Der Kreis ist also wirklich so gross, als ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich der Peripherie und dessen Höhe gleich dem Radius ist.

Zusatz. Es folgt zugleich noch: dass der Umfang eines umgeschriebenen Vielecks grösser, der eines eingeschriebenen aber kleiner ist, als der Umfang des Kreises, ferner: dass der Umfang eines eingeschriebenen Vielecks mit jeder Verdoppelung der Seitenzahl grösser, der des umgeschriebenen hingegen immer kleiner wird, bis beide ihre Grenze, den Kreis, erreichen und gleich werden (§. 52).

138.

Kreisverhältniss. Berechnung des Umfangs und Inhalts eines Kreises kommt sehr häufig vor und man musste deshalb schon frühe darauf sinnen, zur Kenntniss der Zahl zu gelangen, welche angiebt, wie viel mal der Umfang eines Kreises grösser ist, als sein Durchmesser. Dass diese Zahl, das sogenannte Kreisverhältniss, zwischen 3 und 4 liegen muss, folgt schon daraus, dass der Umfang des eingeschriebenen regelmässigen Sechsecks gerade dreimal, der Umfang des umgeschriebenen Vierecks aber viermal so gross ist, als der Durchmesser (§§. 134 und 133). Nun ist aber der Umfang des Kreises grösser, als der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks und kleiner, als der des umgeschriebenen Vierecks (§. 137, Zusatz). Es kommt also darauf an, den zu 3 hinzukommenden Bruch zu bestimmen, um jenes fragliche Kreisverhältniss zu haben.

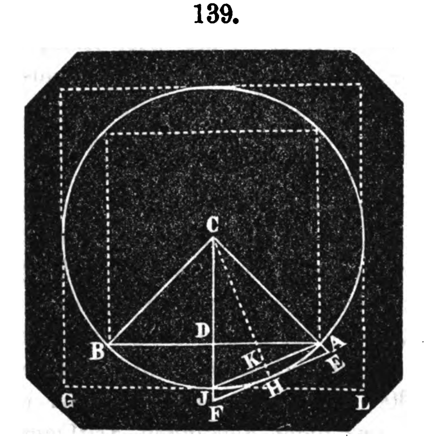
Unter den geschichtlich bekannten Mathematikern war Archimedes, 300 v. C., der erste, welcher nach einer unvollkommenen, uns nicht geläufigen Arithmetik fand, dass diese gesuchte Zahl zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ liegt. Er nahm, als für die damalige Praxis und auch jetzt noch häufig genügend, die erstere ein wenig zu grosse, aber bequemere Zahl $3\frac{1}{7}$. Metius fand diese fragliche Zahl weit genauer $= \frac{355}{113} = 3\frac{16}{113} = 3{,}141592\cdots$ Durch höhere Mathematik ist

dieses Kreisverhältniss noch genauer und schärfer, als je erforderlich, bis auf 250 Decimalen berechnet worden.*)

Wir nehmen von diesem Kreisverhältniss, das wahrscheinlich irrational ist, und als solches sich nie genau durch Zahlen ausdrücken lässt, nur die sieben ersten Decimalen, nämlich: 3,1415926, als für die meisten Fälle vollkommen genügend. In einem Werke der Braminen, betitelt *Ayeen Akbery*, hat man das Verhältniss des Durchmessers zum Umfang wie 1250 : 3927, d. i. wie 1 : 3,1416 gefunden, welches 2000 Jahr älter, und genauer ist, als das Archimedische $3\frac{1}{7} = 3,142\cdot\cdot$, welches schon in der dritten Decimale fehlerhaft ist. Das von Metius, $\frac{355}{113} = 3,1415929$, weicht erst in der siebenten Decimale von der Wahrheit ab. Das äusserst mühsame und langweilige Verfahren, durch blosse Elementar-Arithmetik diese Zahl zu finden, lehrt der folgende Paragraph.

Bei andeutenden Kreisrechnungen in Formeln pflegt man, der Kürze wegen, statt dieser Zahl den griechischen Buchstaben π (sprich: pih) zu setzen, wo man dann, je nachdem es die geringere oder grössere Genauigkeit erfordert, statt π die Zahl $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ oder 3,1416 oder 3,1415926 nimmt.

139.



Berechnung der Zahl π. Man setze, der bequemeren Rechnung halber, den Radius eines Kreises, AC = 1, so ist,

*) S. Astron. Nachrichten 25 B. v 210.

nach §. 107, die Seite des eingeschriebenen regelmässigen Vierecks $AB = \sqrt{2} = 1{,}4142135\cdots$ Die Seite des umgeschriebenen Vierecks ist offenbar dem Durchmesser gleich, also $GL = 2$. Mithin ist der halbe Umfang des eingeschriebenen Vierecks $2{,}8284271\cdots$ mal und der halbe Umfang des umgeschriebenen Vierecks viermal so gross, als der Radius, und eben so viel mal sind die ganzen Umfänge der erwähnten Vierecke grösser, als der Durchmesser.

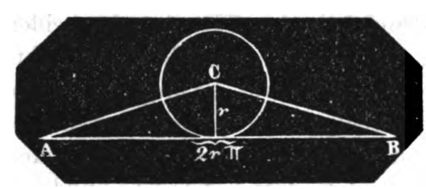
Aus den Seiten der ein- und umgeschriebenen Vierecke berechne man nun die Seiten der ein- und umgeschriebenen Achtecke, indem man zuerst das Perpendikel CD aus $AC = 1$ und $AD = \frac{1}{2}AB = 0{,}7071067\cdots$ berechnet, nämlich $CD = \sqrt{1 - \overline{AD}^2}$, dann hat man auch $DJ = 1 - CD$. Aus den beiden Catheten DJ und AD findet man die eingeschriebene Achtecksseite $AJ = 0{,}7653668\cdots$ Um hieraus die umgeschriebene Achtecksseite zu erhalten, berechne man erst das Perpendikel $CK = \sqrt{1 - (\frac{1}{2}AJ)^2}$, dann hat man aus den ähnlichen Dreiecken CAJ und CEF die Proportion: $CK : CH = AJ : EF$, und hieraus folgt die umgeschriebene Achtecksseite $EF = 0{,}8284271\cdots$ Mithin ist der halbe Umfang des eingeschriebenen Achtecks $3{,}0614674\cdots$ mal, der des umgeschriebenen Achtecks $3{,}3137085\cdots$ mal grösser, als der Radius, also die ganzen Umfänge eben so viel mal grösser, als der Durchmesser.

Fährt man auf diese unerträglich mühsame Weise fort und berechnet die Seite des ein- und umgeschriebenen 16-Ecks, 32-Ecks u. s. w., so würde man finden, dass, den Durchmesser = 1 gesetzt (vergleiche §. 194):

Der Umfang des eingeschriebenen regelmässigen			Der Umfang des umgeschriebenen regelmässigen
4-Ecks,		= 2,8284271···	4,
8	„	= 3,0614674···	3,3137085···
16	„	= 3,1214451···	3,1825979···
32	„	= 3,1365485···	3,1517249···
64	„	= 3,1403311···	3,1441184···
⋮		⋮	⋮
8192	„	= 3,1415925···	3,1415928···
16384	„	= 3,1415926···	3,1415927···

Die gesuchte Zahl π, welche angiebt, wie viel mal der Umfang des Kreises grösser ist, als der Durchmesser, fällt also zwischen 3,1415926··· und 3,1415927··· (§. 137, Zusatz) und ist folglich bis auf sieben Decimalen genau: $\pi=3,1415926$. Multiplicirt man mit dieser Zahl den Durchmesser, so erhält man die Länge der Peripherie bis auf ein Zehnmillionteil des Durchmessers genau, z. B. bis auf $\frac{1}{50}$ Zoll $= \frac{1}{8}$ Linie genau, wenn der Durchmesser = 20000 Fuss (1 Meile) wäre.

140.



Kreisrechnungen. Bedeutet r den Radius, d den Durchmesser, U den Umfang und F den Inhalt eines Kreises, so findet man Umfang und Inhalt nach folgenden Formeln

$$U = 2r\pi = d\pi \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$F = r^2\pi = \frac{d^2}{4}\pi \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

Die erste Formel, nach welcher man den Durchmesser d oder $2r$ mit π multipliciren muss, um den Umfang des Kreises zu erhalten, folgt schon aus §. 139. Da nun die Fläche eines Kreises gleich der eines Dreiecks, CAB, ist, dessen Grundlinie AB gleich dem Umfang $2r\pi$ und dessen Höhe gleich dem Radius r ist (§. 137), so ist, indem man die halbe Grundlinie $\frac{1}{2}AB = r\pi$ mit der Höhe r multiplicirt (§. 102), die Fläche des Kreises $F = r \cdot r\pi = r^2 \cdot \pi$ (sprich: r quadrat π).

Zusatz 1. Es folgt aus vorstehenden Formeln, dass sich die Umfänge zweier Kreise wie ihre Radien, oder wie ihre Durchmesser, ihre Inhalte aber sich wie die Quadrate derselben verhalten.

Zusatz 2. Dividirt man den Umfang eines Kreises durch π, so erhält man den Durchmesser d. Dividirt man den Inhalt durch π und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man den Radius.

In Zeichen:

$$d = \frac{U}{\pi} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

Aufgabe 1. Man berechne die Umfänge dreier Kreise, deren Radien 5′ 8″; 3′ 6″ und $\frac{1}{2}$′ sind.

Bei diesem und allen folgenden Uebungsbeispielen ist, der kürzern Rechnung halber, immer das Archimedische Kreisverhältniss genommen, nämlich $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$.

Aufgabe 2. Man berechne die Flächeninhalte der Kreise, deren Radien 3′ 6″; 0′,97; 4″,05 und 1′ sind.

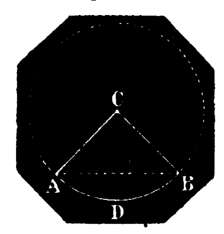
Aufgabe 3. Man suche die Radien zweier Kreise, deren Inhalte 54,62□″; 5□′ 8□″.

Antwort. $35\frac{13}{21}$′; 22′; $3\frac{1}{7}$; $38\frac{1}{2}$□′; 2,95□′; 51,55□″; $3\frac{1}{7}$□′; 4″,17; 1′,27.

141.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun leicht, wie man Theile von einem Kreise berechnen muss.

1) Ist die Länge eines in Graden gegebenen Bogens $\widehat{ADB}$ zu berechnen, so muss man den 360sten Theil vom ganzen Umfange so oft nehmen, als der Bogen Grade enthält.



2) Ist ein Kreisausschnitt, d. i. ein von zwei Radien und einem Bogen eingeschlossener Theil vom Kreise, wie CADB zu berechnen, so nimmt man den 360sten Theil von der ganzen Kreisfläche so oft, als der Winkel am Mittelpunct oder der Bogen $\widehat{ADB}$ Grade enthält. — Ist der Bogen $\widehat{ADB}$ in Länge gegeben (gemessen), so betrachte man den Ausschnitt wie ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich der Länge des Bogens und dessen Höhe gleich dem Radius ist.

3) Hat man endlich einen Kreisabschnitt, d. i. einen von einer Sehne und einem Bogen begrenzten Theil, ADBA, zu berechnen, so muss man von dem Ausschnitt CADB das Dreieck CAB subtrahiren.

Zweiter Theil.

Körperliche Geometrie.

Vierzehntes Buch.

Von der Lage der Ebenen.

142.

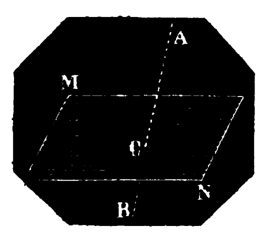
So wie die ebene Geometrie nur solche räumliche Grössen betrachtet, deren sämmtliche Puncte in einerlei Ebene liegen und hiebei zuerst von der graden Linie ausgeht, dann die Neigung zweier Linien gegen einander bestimmen lehrt, hierauf zu geschlossenen Figuren fortschreitet, die wichtigsten derselben besonders betrachtet, von den Eigenschaften, Ausmessung und Aehnlichkeit derselben handelt etc., so wird auf ähnliche Weise die sogenannte körperliche Geometrie sich mit solchen räumlichen Grössen beschäftigen, deren Puncte nicht alle in einerlei Ebene liegen, und hierbei zuerst die Lage der Ebenen gegen einander betrachten, dann zu geschlossenen Figuren, nämlich zu ringsum von allen Seiten durch lauter Ebenen begrenzten Räumen (Körper) übergehen, sie ausmessen lehren etc.

Obwohl nun die körperliche Geometrie fast nur eine Anwendung der ebenen Geometrie ist, so bieten doch ihre ersten Sätze dem Anfänger deshalb Schwierigkeiten dar, weil in perspectivischer Zeichnung (indem das, was ausserhalb der Bildebene liegt, doch auf diese gezeichnet werden muss) nicht alle Theile einer Figur im richtigen Verhältniss erscheinen. Indessen kann man der Anschauung auf verschiedene Weise zu Hülfe kommen, indem man z. B., statt geometrischer Körper, physische Körper aus irgend einer weichen Masse schneidet und formt.

143.

Man pflegt eine Ebene gewöhnlich durch ein Viereck anzudeuten und durch zwei gegenüber stehende Buchstaben zu bezeichnen. So wie man eine grade Linie nach beiden Enden hin bis in's Unendliche verlängert denken kann, so kann man sich auch eine Ebene nach allen Seiten bis in's Unendliche ausgedehnt denken. Versinnlichen kann man eine Ebene und deren Lage durch ein Blatt Papier, von dessen Dicke und Unebenheiten man abstrahirt.

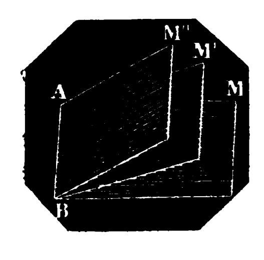
144.



Lehrsatz. Eine grade Linie kann eine Ebene nur in einem Punct schneiden.

Beweis. Sei MN eine Ebene und AB eine durch sie hindurch gehende grade Linie.*) Hätte diese Linie ausser dem Durchschnittspunct C noch einen zweiten mit der Ebene gemein, so müsste sie in ihrer ganzen Ausdehnung in derselben bleiben (§. 5), weil sie dieselbe aber schneiden soll, so kann dies nur in einem Punct geschehen, weil beide, sowohl Linie als Ebene, keine Dicke haben.

145.



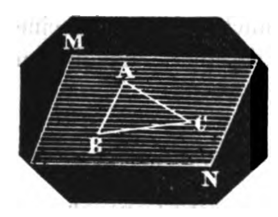
Lehrsatz. Durch zwei Puncte, A, B, oder durch die sie verbindende grade Linie AB sind unzählig viele Ebenen möglich.

Beweis. Zuerst kann man sich eine durch A und B gehende Ebene, BM, denken und sich sodann vorstellen, sie werde um AB, wie um eine Achse, gedreht (so

*) Sei MN ein Stück der Bildebene, so liegt nur ein Punct, C, der Linie AB in dieser Ebene, alle übrigen Puncte der Linie AB liegen ausserhalb derselben, theils oberhalb, theils unterhalb. Man muss sich also die Linie AB gegen die Ebene aufgerichtet denken. Wir werden solche Linien immer punctiren.

wie man ein Blatt in einem Buche wendet), alsdann kommt sie in unzählig verschiedene Lagen. Statt jeder dieser verschiedenen Lagen kann man sich aber eine andere Ebene, BM′, BM″,··· durch AB gelegt*) denken.

146.



Lehrsatz. Durch drei nicht in grader Linie liegende Puncte ist immer eine, aber nur eine Ebene möglich, und die Lage derselben vollkommen bestimmt.

Beweis. Zuerst kann man sich durch zwei der festen Puncte, z. B. durch B und C, eine Ebene gelegt und diese dann um BC gedreht denken, bis sie auch durch den dritten Punct A geht.

Weil nun die Ebene durch alle drei Puncte, A, B, C, geht, so geht sie auch durch die drei Seiten des Dreiecks ABC (§. 5). Wollte man noch eine zweite Ebene durch die drei Puncte A, B, C legen, so müsste sie auch wieder durch die drei Seiten des Dreiecks A, B, C gehen, folglich mit der zuerst hindurch gelegten in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen fallen. Es verhält sich hier mit der Ebene ähnlich, wie mit der graden Linie. Durch einen Punct sind unzählig viele grade Linien möglich, durch zwei Puncte aber nur eine, deren Lage dadurch völlig bestimmt ist. Durch ein oder zwei Puncte sind unzählig viele Ebenen möglich, durch drei aber nur eine, deren Lage dadurch bestimmt ist.

Zusätze. 1) Wenn zwei Ebenen drei nicht in grader Linie liegende Puncte gemein haben, so fallen sie zusammen und bilden nur eine Ebene.

2) Man sagt von mehreren Puncten im Raume, durch welche eine Ebene gelegt werden kann, sie liegen in dieser Ebene oder in einerlei Ebene. — Durch je drei beliebige Puncte im Raume (z. B. drei Thurmspitzen) kann man immer eine Ebene gelegt denken, aber nicht durch je vier (viel weniger durch fünf, sechs etc.), es sei denn, dass der vierte Punct schon mit

---

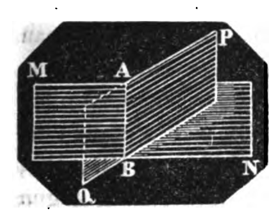
*) Bei Ebenen bedeutet das Wort legen (durch Puncte hindurchführen) dasselbe, was bei Linien ziehen heisst.

den drei andern in einerlei Ebene läge. Es erklärt sich hieraus, weshalb ein dreibeiniger Tisch immer fest steht, wie uneben auch der Grund, worauf er steht, sein möge.

3) Ferner ist klar, dass durch zwei sich schneidende Linien oder durch einen Winkel immer eine Ebene möglich und der Lage nach bestimmt ist, eben so durch zwei Parallellinien, welche dem Begriffe zufolge immer in einer Ebene liegen.

Zwei Linien, welche kreuzweis über einander weggehen, liegen nicht in einerlei Ebene, sind also auch nicht parallel, obgleich sie sich nicht schneiden.

147.



Lehrsatz. Der Durchschnitt zweier Ebenen ist immer eine grade Linie.

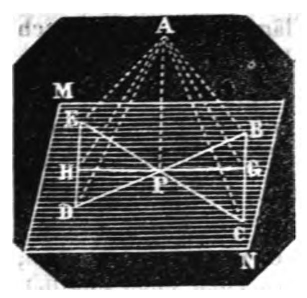
Beweis. Seien MN, PQ die beiden sich schneidenden Ebenen. Weil nun sämmtliche Puncte des Durchschnitts beiden Ebenen gemein sind, so müssen sie auch in grader Linie liegen; denn, lägen nur drei davon nicht in grader Linie, so müssten auch, weil diese Puncte in beiden Ebenen zugleich liegen, und durch drei nicht in grader Linie liegende Puncte nur eine Ebene möglich ist, beide Ebenen zusammen fallen, und könnten sich nicht schneiden.

148.

Erklärung. Wenn eine Linie, AP (siehe folgende Figur), so auf einer Ebene, MN, steht, dass sie mit allen durch den Fusspunct P in der Ebene gezogenen Linien PB, PC, PD ... rechte Winkel bildet, so sagt man: die Linie stehe senkrecht auf der Ebene, und umgekehrt: die Ebene stehe senkrecht auf der Linie. In jedem andern Falle heissen beide schräg gegen einander.

149.

Lehrsatz. Eine Linie steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie nur auf zwei sich schneidenden Linien in derselben senkrecht steht.



Beweis. Seien BD, CE die beiden, in der Ebene MN liegenden und sich in P schneidenden Linien, und AP auf beiden senkrecht, so dass $\widehat{APB} = \widehat{APC} = 90°$,*) so haben wir nur zu zeigen, dass AP dann auch auf jeder andern beliebig durch P gezogenen Linie, HG, senkrecht steht.

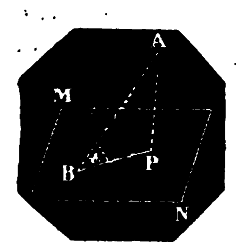
Weil nach Voraussetzung $\widehat{APB} = \widehat{APC} = 90°$, so sind auch ihre Nebenwinkel APD und APE Rechte (§. 28). Nimmt man nun PB = PC = PD = PE, zieht BC und DE, so ist zuerst $\triangle BPC \cong \triangle DPE$ (§. 34), dann $\triangle BPG \cong \triangle DPH$ (§. 37); hieraus folgt: PG = PH und BG = DH. Denkt man sich jetzt die Puncte B, C, D, E mit A verbunden, so erhält man vier gleiche, bei P rechtwinklige Dreiecke, nämlich $\triangle APB \cong \triangle APC \cong \triangle APD \cong \triangle APE$, weil sie alle eine Cathete, AP, gemein und die andern Catheten PB, PC, PD, PE gleich haben, es sind also auch ihre schräg gegen die Ebene MN aufgerichteten Hypotenusen gleich, nämlich: AB = AC = AD = AE; mithin sind nun auch die schräg gegen die Ebene MN aufstehenden Dreiecke ABC und ADE gleich und gleichschenklig, also auch die Winkel an den beiden Grundlinien BC und DE einander gleich, daher $\widehat{ABG} = \widehat{ADH}$. Denkt man jetzt noch AG und AH gezogen, so ist erstlich $\triangle ABG \cong \triangle ADH$ (§. 34). (Denn wie vorhin bewiesen, ist BG = DH, AB = AD und $\widehat{ABG} = \widehat{ADH}$, folglich auch AG = AH. Das Dreieck AHG ist also ein gleichschenkliges und P die Mitte der Grundlinie, folglich steht auch AP auf HG senkrecht (§. 44), und da dies für jede andere durch P gezogene Linie gilt, so steht auch AP auf der Ebene MN senkrecht (§. 148).

---

*) Die nicht in der Ebene MN liegenden Winkel und Linien können in der Zeichnung nicht in natürlicher Grösse erscheinen, deshalb muss hier die Einbildungskraft zu Hülfe kommen. Um sich diesen und ähnliche Sätze zu veranschaulichen, nehme man die Oberfläche des Tisches als die Ebene MN, ziehe darauf die Linien BD, CE, und stecke senkrecht auf diese in P einen Stift ein. Die übrigen, aufwärts gehenden Linien, wie AB, AC etc. kann man sich leicht hinzudenken, oder ebenfalls durch schräg eingesteckte Stifte anschaulich machen.

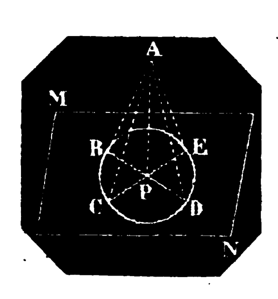
Zusatz. Es ist für sich klar, dass 1) von einem Punct ausserhalb oder innerhalb einer Ebene nur ein Perpendikel auf dieser Ebene möglich ist; 2) dass die von einem Punct an eine Ebene gehende Senkrechte kürzer ist, als jede Schräge. — Unter Entfernung eines Puncts von einer Ebene versteht man immer das auf diese (nöthigenfalls erweitert gedachte) Ebene gefällte Perpendikel.

150.



Erklärung. Die Neigung einer schrägen Linie, AB, gegen eine Ebene, MN, wird immer durch den spitzen Winkel bestimmt, der entsteht, wenn man von einem beliebigen Punct, A, der Schrägen ein Perpendikel, AP, auf die Ebene fällt, und den Fusspunct P desselben mit dem Fusspunct B der Schrägen verbindet. Durch diesen Winkel ABP ist dann die Neigung der Schrägen gegen die Ebene bestimmt.

151.



Lehrsatz. Wenn von einem Puncte, A, mehrere Schrägen von gleicher Länge an eine Ebene gehen, so liegen die Fusspuncte dieser gleichen Schrägen alle in der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunct der Fusspunct des von demselben Punct A auf die Ebene gefällten Perpendikels ist.

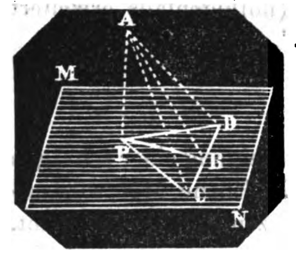
Beweis. Sei AB=AC=AD=etc. und AP perpendikulär auf MN. Denkt man nun P mit B, C, D·· verbunden, so sind alle entstehenden bei P rechtwinkligen Dreiecke einander gleich, weil sie nach Voraussetzung gleiche Hypotenusen und eine Cathete, AP, gemeinschaftlich haben. Daher:

PB = PC = PD = etc. (§. 107 oder §. 56, Zusatz.)

Zusatz. Bestimmt man in einer Ebene drei Puncte, B, C, D, welche von einem ausserhalb liegenden Punct, A, gleich weit entfernt sind, und beschreibt dann durch diese drei Puncte

einen Kreis, so ist der Mittelpunct desselben der Fusspunct des von A auf die Ebene gefällten Perpendikels.

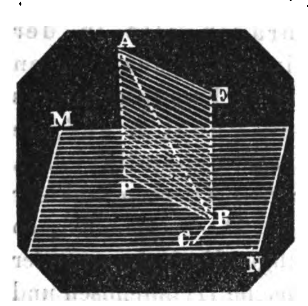
152.



Lehrsatz. Wenn man von einem Puncte, A, eine Schräge, AB, und eine Senkrechte, AP, an eine Ebene zieht, die Fusspuncte B und P verbindet, und auf dieser Verbindungslinie, im Fusspunct der Schrägen ein Perpendikel, CB, errichtet, so ist dieses auch senkrecht auf der Schrägen AB. In Zeichen: Wenn AP senkrecht auf der Ebene MN und $\widehat{CBP} = 90°$ ist, so ist auch $\widehat{CBA} = 90°$.

Beweis. Verlängere CB, so dass $BD = BC$, ziehe PC, PD, so sind die bei B rechtwinkligen Dreiecke PBC und PBD gleich, daher $PD = PC$. Verbindet man jetzt C und D mit A, so sind die bei P rechtwinkligen Dreiecke APC und APD, wegen ihrer gleichen Catheten, gleich; daher $AC = AD$. Das Dreieck ACD ist also gleichschenklig, und da B die Mitte der Grundlinie CD ist, so ist auch $\widehat{ABC} = 90°$.

153.



Lehrsatz. Wenn eine Linie senkrecht auf einer Ebene steht, so ist auch jede damit Parallele auf der Ebene senkrecht.

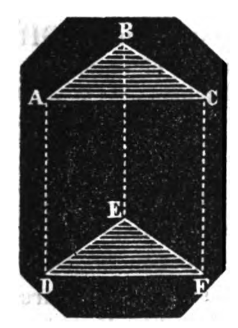
Beweis. Sei AP senkrecht auf MN, und $EB \parallel AP$. Alsdann kann man sich durch die Parallelen AP, EB eine Ebene, EP, gelegt denken (§. 146, 3), welche die Ebene MN in der graden Linie PB schneidet. Weil nun nach Voraussetzung $\widehat{APB} = 90°$ und $EB \parallel AP$, so ist auch $\widehat{EBP} = 90°$. Denkt man sich nun CB auf PB senkrecht, so ist CB auch senkrecht auf der Schrägen AB (§. 152), mithin ist auch CB senkrecht auf der durch BP

und BA gelegten Ebene, also auch senkrecht auf EB (§. 149). Die mit AP Parallele EB macht also mit BP und BC rechte Winkel, ist also senkrecht auf der Ebene MN (§. 149).

Zusatz 1. Da in einem Puncte nur ein Perpendikel auf einer Ebene möglich ist, so folgt, dass, wenn man umgekehrt in einem Puncte, B, ein Perpendikel EB auf der Ebene MN errichtet, dieses mit jeder andern auf MN senkrechten Linie, AP, parallel sein muss.

Zusatz 2. Wenn zwei Linien mit einer dritten einzeln parallel sind, so sind sie unter einander parallel. Denn denkt man sich durch die dritte Linie eine senkrechte Ebene gelegt, so steht auf dieser auch jede der beiden Parallelen senkrecht.

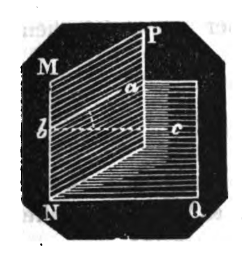
154.



Lehrsatz. Wenn die Schenkel zweier, nicht in einer Ebene liegenden Winkel, BAC und EDF, nach denselben Seiten hin parallel sind, so sind die Winkel gleich.

Beweis. Man denke sich von den parallelen Schenkeln gleiche Stücke abgeschnitten, AB=DE und AC=DF, dann BC und EF gezogen, so wie auch AD, BE, CF. Dann ist AD ⫫ BE und AD ⫫ CF. (§. 93); folglich CF ⫫ BE (§. 153, 2), also auch BC = EF. Mithin ist $\triangle BAC \cong \triangle EDF$ (§. 41) und hieraus: $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$.

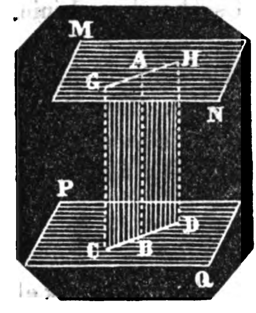
155.



Erklärung. Unter Neigung zweier Ebenen, MQ, PN, gegen einander versteht man allemal den Winkel, der entsteht, wenn man auf ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie MN in einem beliebigen Punct, *b*, zwei Perpendikel errichtet, wovon das eine, *bc*, in der Ebene MQ und das andere, *ba*, in der Ebene PN liegt. Da der Punct *b* in der Durchschnittslinie MN zufolge §. 154 ganz willkürlich genommen werden kann, so ist durch den Winkel

als die Neigung der beiden Ebenen gegen einander vollkommen bestimmt. Denkt man sich die obere Ebene PN um die Durchschnittslinie MN so lange gedreht, bis der Winkel *abc* ein rechter wird, so sind die Ebenen senkrecht gegen einander.

156.



Lehrsatz. Wenn zwei Ebenen, MN, PQ, auf einer und derselben Linie, AB, senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Beweis. Durch die Linie AB denke man sich noch eine dritte Ebene, GD, gelegt und diese um AB ganz herum gedreht, so sind ihre jedesmaligen Durchschnittslinien in den beiden Ebenen MN, PQ, z. B. die Durchschnitte GH und CD, weil auf AB senkrecht (§. 148) und in einer Ebene, GD, liegend, stets parallel, also auch die Ebenen MN und PQ, in welchen die Durchschnittslinien liegen.

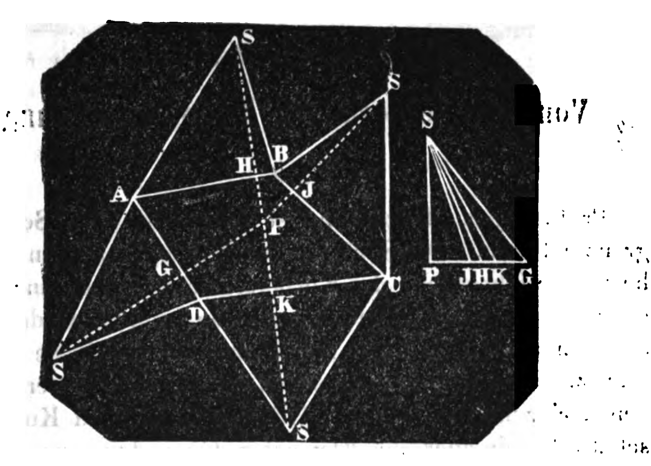
Zusatz 1. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Durchschnitte parallel, die Wechselwinkel und gleichliegenden Winkel gleich etc.

Zusatz 2. Wenn zwei sich schneidende Ebenen zugleich auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, so ist auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht. Es seien z. B. die zwei an einander stossenden ebenen Wände eines Zimmers auf dem ebenen Fussboden (oder Decke) senkrecht, so ist es auch ihr Durchschnitt. (§. 149 und §. 155.)

Anmerkung. Die vorhergehenden Sätze kommen oftmals zur Anwendung, namentlich beruht auf ihnen die Theorie sowohl der perspectivischen, als auch der geometrischen Zeichnenkunst.

157.

*) **Aufgabe.** Es ist ein beliebiges ebenes Vieleck, z. B. ein Viereck, ABCD, gegeben, auf der Ebene dieses Vierecks denke man sich im Puncte P ein (in der Zeichnung nicht angegebenes) Perpendikel von gegebener Länge, SP, errichtet. Man soll nun über die Seiten des Vierecks Dreiecke zeichnen, die



gegen das Viereck aufgeklappt im Endpunct S des Perpendikels SP zusammenstossen und ein schliessendes Dach bilden.

Auflösung. Vom Fusspuncte P des Perpendikels SP (in der Zeichnenkunst heisst P die Projection von S) fälle an die Seiten des Vierecks die Perpendikel PG, PH, PJ, PK und zeichne dann rechtwinklige Dreiecke, welche diese Perpendikel und die Höhe des Daches SP zu Catheten haben, so sind die Hypotenusen die nöthigen Verlängerungen der von P auf die Seiten des Vierecks gefällten Perpendikel. Die Winkel SGP, SHP··· geben zugleich die Neigungen der Dächer SAD, SAB··· gegen die Ebene des Vierecks ABCD an. (§§. 152, 155.)

Zusatz. Halbirt man zwei benachbarte Winkel des Vielecks, z. B. A und B, und nimmt den Durchschnittspunct der Halbirungslinien als Projection der Spitze des zu construirenden Daches, so würden drei Dächer, SAB, SAD, SBC, gleiche Neigung gegen die Grundfläche ABCD bekommen. Soll diese Neigung 45° betragen, so muss man die Höhe des Daches gleich den, vom bestimmten Projectionspunct auf die drei Seiten AB, AD, BC gefällten und gleichen Perpendikeln nehmen.

Fünfzehntes Buch.

Von den Körpern und deren Berechnung.

158.

Erklärungen. Körper heisst jeder von allen Seiten begrenzte Raum. Die Summe aller ihn begrenzenden Flächen heisst die Oberfläche des Körpers. So wie aber eine Fläche durch eine einzige Linie begrenzt sein kann, z. B. der Kreis, so kann auch ein Körper durch eine einzige Fläche begrenzt sein, z. B. die Kugel. Ausser den, später näher zu erwähnenden drei runden Körpern: Cylinder, Kegel und Kugel, beschäftigt sich aber die Elementar-Geometrie nur mit solchen Körpern, welche von lauter ebenen Flächen (Ebenen) begrenzt werden.

Die Linien, in welchen sich irgend zwei den Körper begrenzende Ebenen schneiden, heissen Kanten. An den Puncten, in welchen drei oder mehrere Grenzebenen zusammenstossen, entsteht das, was man, von aussen betrachtet, eine Ecke, von innen gesehen, einen körperlichen Winkel nennt. Um eine Ecke oder körperlichen Winkel zu bilden, sind also wenigstens drei durch einerlei Punct gehende Ebenen erforderlich.

Ein Körper wird manchmal nach der Anzahl der ihn begrenzenden ebenen Flächen benannt, ein achtflächiger Körper z. B. wird von acht Flächen begrenzt. Von weniger als vier Ebenen kann ein Körper nicht begrenzt sein. Körper, welche in der Praxis häufig vorkommen, und deren Namen deshalb wohl zu merken, sind folgende:

1) **Prisma.** Jeder Körper, begrenzt durch zwei gleiche Vielecke, welche man die Grundflächen nennt, deren gleiche Seiten parallel und dessen andere Flächen, Seitenflächen genannt, folglich Parallelogramme sind (§. 93), heisst ein Prisma, und zwar ein dreiseitiges, vierseitiges etc., je nach dem die Grundflächen Dreiecke, Vierecke etc. sind. Die Kanten, in welchen irgend zwei Seitenflächen sich schneiden, nennt man hier Seitenlinien. Ein jedes Prisma kann man beschrieben denken, indem die eine untere Grundfläche sich an zwei parallelen Seitenlinien und stets parallel mit sich selbst bis zur obern Grundfläche

bewegt (siehe Figur §. 162). In jedem Prisma sind die Seitenlinien einander gleich und parallel.

2) Ein Prisma heisst grade, wenn die Seitenlinien senkrecht auf der Grundfläche stehen, mithin alle Seitenflächen Rechtecke sind.

3) Unter Höhe eines Prismas versteht man den Abstand der beiden parallelen Grundflächen, nämlich das von einem beliebigen Punct der einen Grundfläche auf die andere (nöthigenfalls erweitert gedachte) Grundfläche gefällte Perpendikel. Bei einem graden Prisma geben schon die Seitenlinien die Höhe an.

4) Ein grades Prisma heisst regelmässig, wenn die Grundflächen regelmässige Vielecke sind.

5) Parallelepipedum heisst jedes Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind (s. Figur §. 159). Sind die Grundflächen und Seitenflächen Rechtecke, so heisst das Parallelepipedum ein grades und rechtwinkliges.

6) Cubus (Würfel) heisst jedes Parallelepiped, dessen Grundflächen und Seitenflächen Quadrate sind, die folglich gleich und senkrecht auf einander sind.

7) Cylinder (Walze) heisst jeder prismatische Körper, der zwei gleiche und parallele Kreise zu Grundflächen hat, und dessen Seitenfläche eine einzige solche krumme ist, deren sämmtliche mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte der Grundfläche gleich sind. Man unterscheidet grade und schiefe Cylinder. Nur ersterer gehört in die Elementar-Geometrie, und diesen kann man sich durch Umdrehung eines Rechtecks, ECBG, um die Seite EC, als Achse beschrieben denken (s. Figur §. 164). Die Radien EG und CB beschreiben dann gleiche und parallele Kreise, die Seitenlinie GB die in sich zurücklaufende krumme Seitenfläche.

8) Pyramide heisst jeder Körper, dessen Grundfläche ein beliebiges Vieleck ist, und dessen Seitenflächen Dreiecke sind, die in einer Spitze, S, zusammenstossen (s. Figur §. 166).

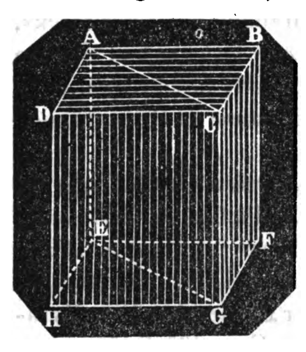
Ein von der Spitze der Pyramide auf die Grundfläche gefälltes Perpendikel heisst die Höhe der Pyramide. Eine Pyramide wird nach der Anzahl Seiten der Grundfläche benannt: dreiseitige, vierseitige etc. Ferner heisst eine Pyramide regelmässig, wenn die Grundfläche ein regelmässiges Vieleck ist, und das von der Spitze darauf gefällte Perpendikel den Mittelpunct des regelmässigen Vielecks trifft.

9) Kegel heisst jeder pyramidische Körper, dessen Grundfläche ein Kreis, und dessen Seitenfläche eine einzige solche krumme ist, dass darin von der Spitze nach jedem Punct der Peripherie der Grundfläche eine grade Linie gezogen werden kann. Die von der Spitze nach dem Mittelpunct der Grundfläche gehende Linie heisst die Achse des Kegels. Man unterscheidet grade und schiefe Kegel Nur ersterer gehört hieher und diesen kann man sich beschrieben denken, indem ein rechtwinkliges Dreieck, SCB, sich um eine Cathete, SC, als Achse dreht. (S. Figur §. 170.)

10) Zwei Körper heissen symmetrisch, wenn alle Bestandtheile derselben, wie Ecken, Winkel, Seitenflächen etc. einzeln genommen. vollkommen gleich sind, jedoch in der Zusammensetzung gerade entgegengesetzte Lage haben, so dass dasselbe Stück, welches bei dem einen Körper rechts, oben etc. in dem andern links, unten etc. liegt. Obgleich solche symmetrische Körper sonst vollkommen gleich sind (z. B. ein Paar Stiefel), so können sie doch, wegen der entgegengesetzten Lage ihrer gleichen Theile, nicht in einander gesteckt werden (nicht congruent sein).

159.

Lehrsatz. Ein Parallelepipedum wird durch eine Diagonal-Ebene in zwei gleich grosse dreiseitige Prismen getheilt.*)



Beweis. Man denke sich durch zwei gegenüber liegende parallele Seitenlinien, CG und AE, eine Ebene (Schnitt) geführt, so wird dadurch das Parallelepiped AG offenbar in zwei dreiseitige Prismen getheilt. Das rechts liegende dreiseitige Prisma hat die Ebenen BCGF, ABFE und die Diagonal-Ebene ACGE zu Seitenflächen, das links liegende die Ebenen ADHE, DCGH und die

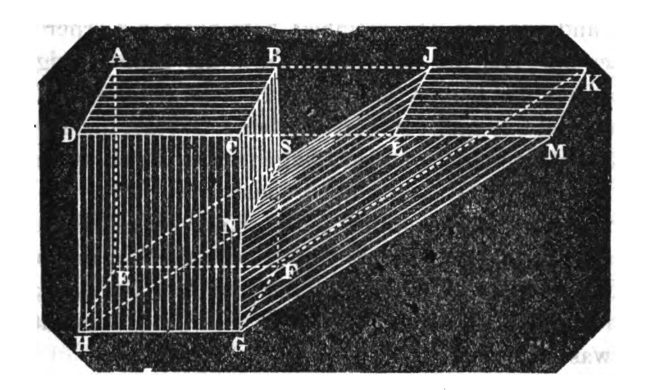
*) Des leichtern Verständnisses halber möge der Anfänger zuvor §§. 161 und 162 lesen. Auch möge man sich solche Körper aus einer weichen Masse formen.

Diagonal-Ebene zu Seitenfläche *i*. Betrachtet man im rechts liegenden Prisma das Dreieck ABC, und im links liegenden das Dreieck HEG als untere Grundfläche, so sind die Grundflächen in beiden gleich, und da auch die Seitenflächen in beiden Prismen, sowohl gegen ihre Grundflächen ABC, HEG, als unter einander dieselbe Neigung haben (§§. 155 und 156, 1), so sind die Prismen jedenfalls symmetrisch gleich (gleich gross). Wäre das Parallelepiped ein grades, so könnte man beide Hälften in einander gesteckt denken.

160.

Lehrsatz. Ein schiefes Parallelepipedum ist so gross, als ein grades von derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. Man nehme zuerst an, dass die beiden obern Grundflächen zwischen denselben Parallelen AK, DM liegen und denke sich die Parallelen AD, BC, JL, KM,... EH, FG gegen die Bildfläche aufgerichtet, z. B. senkrecht auf der Ebene des Papiers, so dass also AB, JK, EF in der Bildfläche, DC, LM, HG aber davor liegen. Das Parallelepiped AG kann man sich nun auch beschrieben denken, indem sich die hintere Seitenfläche ABFE parallel mit sich selbst und an den beiden parallelen Linien AD, BC hingleitend, bis zur vordern Seitenfläche DCGH aufbewegt (§. 158, 1), eben so kann man sich das Parallelepiped JG durch die parallele Bewegung der hintern Seitenfläche JKFE bis zur vordern LMGH entstanden denken. Eben so kann man sich nun auch die beiden



dreiseitigen Prismen KBG und JAH beschrieben denken, indem beim erstern die hintere Fläche, nämlich das Dreieck KBF, parallel mit sich selbst bis zur vordern MCG, und beim andern Prisma die hintere Fläche JAE bis zur vordern LDH sich bewegt. Diese beiden dreiseitigen Prismen sind aber offenbar vollkommen gleich. Subtrahirt man von beiden das dreiseitige Prisma, von welchem JBS die hintere und LCN die vordere Grundfläche ist, und addirt zu den gleichen Resten wieder das dreiseitge Prisma, von welchem SEF die hintere und NHG die vordere Grundfläche ist, so erhält man die beiden fraglichen und gleichen Parallelepipeda.

Läge die obere Grundfläche des schiefen Parallelepipedums mit der des graden nicht zwischen denselben Parallelen, so kann man auf gleiche Weise erst zeigen, dass es einem solchen, und folglich auch dem graden an Grösse gleich ist.

Zusatz 1. Parallelepipeda von derselben Grundfläche und Höhe sind gleich gross.

Zusatz 2. Weil jedes der beiden Parallelepipeda durch eine Diagonal-Ebene in zwei gleich grosse dreiseitige Prismen getheilt wird (§. 159), so ist klar, dass auch jedes schiefe dreiseitige Prisma so gross ist, als ein grades von derselben Grundfläche und Höhe.

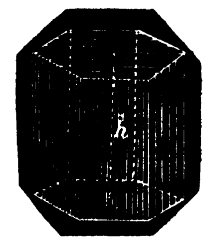
Zusatz 3. Weil jedes Prisma in dreiseitige zerlegt werden kann, so ist auch jedes beliebig vielseitige schiefe Prisma so gross, als ein grades von derselben Grundfläche und Höhe.

161.

Körpermaass. Um von der Grösse eines Körpers einen bestimmten Begriff zu erhalten, muss ausgemittelt werden, wie oft ein anderer, als Maasseinheit betrachteter Körper darin enthalten ist. Als die bequemste Form der Einheit zeigt sich hier sogleich der Cubus (§. 158, 6). Solche cubische Körpereinheiten giebt es nun von verschiedener Grösse, die alle nach der ihnen zu Grunde liegenden Längeneinheit benannt werden. Ist z. B. der zur Maasseinheit genommene Cubus ein Fuss lang, breit und hoch, mithin jeder seiner sechs Flächen ein Quadratfuss, so heisst dieser Cubus oder der von ihm ausgefüllte Raum, ein Cubicfuss. Ist der Cubus 1 Zoll lang, breit und hoch, so hat man 1 Cubiczoll. Hiernach versteht man auch, was eine Cubicelle, Cubicmeile etc. heisst.

Weiss man nun, wie oft eine solche cubische Einheit, z. B. 1 Cubicfuss, in einem Körper enthalten ist, so giebt diese Zahl, verbunden mit der deutlichen Vorstellung der Einheit, einen bestimmten Begriff von der Grösse (Cubicinhalt, Raumesinhalt, Volumen) des Körpers. Wie man diese Zahl finden kann, zeigen folgende Sätze.

162.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Producte aus Grundfläche und Höhe.

Bedeutet F den Quadratinhalt der Grundfläche, h die Höhe und V den Cubicinhalt (Volumen), so ist in Zeichen:

$$V = h \cdot F$$

Beweis. Zeigen wir zuerst, dass der Satz wahr ist für ein grades rechtwinkliges Parallelepipedum.

Angenommen, ein Zimmer habe diese Form und es sei die Länge desselben = 10′, die Breite = 8′ und die Höhe = 7′. Dann wäre der Quadratinhalt des Fussbodens = 80 □′ und es könnten dann (weil die Grundfläche eines Cubicfusses 1 Quadratfuss ist) offenbar 80 Cubicfuss (Würfel) auf dem Fussboden neben einander stehen. Ist nun die Höhe des Zimmers 7′, so würden (weil die Höhe eines Cubicfusses 1 Fuss ist) sieben solche Schichten von je 80 Cubicfuss das ganze Zimmer genau ausfüllen, mithin der Cubicinhalt des Zimmers = 7 · 80 = 560 Cubicfuss sein. — Wäre die Grundfläche des graden Parallelepipedums statt eines Rechtecks, wie hier angenommen worden, ein Parallelogramm, so findet offenbar dieselbe Regel statt, ohne dass man nöthig hat, das Parallelogramm erst in ein Rechteck zu verwandeln. Und hiernach erhellt nun wohl, dass man den Cubicinhalt eines jeden sowohl graden als schiefen Prismas (§. 160, Zusatz 3) findet, wenn man erst den Quadratinhalt der Grundfläche sucht und diesen mit der Höhe multiplicirt; denn so viel Quadratfuss die Grundfläche hält, so viel Cubicfuss könnten (gehörig geformt) auf derselben neben einander stehen, und man hat dann die Anzahl Cubicfuss in dieser untern Schicht so oft zu nehmen, als die Höhe Fuss enthält.

Zusatz 1. Die Seitenfläche eines graden Prismas wird erhalten, indem man den Umfang mit der Höhe multiplicirt;

dem, weil die einzelnen Seitenflächen lauter Rechtecke von gleicher Höhe sind, so sind sie alle zusammen offenbar gleich einem einzigen Rechtecke von derselben Höhe, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange ist.

Zusatz 2. Um die Seitenfläche eines s c h i e f e n Prismas zu erhalten, berechne man die einzelnen Seitenflächen, indem man zwischen je zwei der gleichen und parallelen Seitenlinien ein Perpendikel fällt. Die ganze Seitenfläche ist also gleich einem Parallelogramm oder Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Seitenlinie, und dessen Höhe gleich dem Umfange eines auf den Seitenlinien senkrechten Durchschnitts ist.

Anmerkung. Beim Reduciren der Zahlen auf höhere oder niedere Einheiten muss man bemerken, dass nach dem Duodecimalsystem 1 Cubicfuss = 1728 Cubiczoll und nach dem Decimalsystem 1 Cubicfuss = 1000 Cubiczoll ist.

163.

Aufgaben. 1. Die Grundfläche eines dreiseitigen Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Cathete, $b = 8' \, 9''$, die andere $c = 6' \, 10''$, die Höhe des Prismas sei $h = 14' \, 8''$; wie gross ist der Cubicinhalt V?

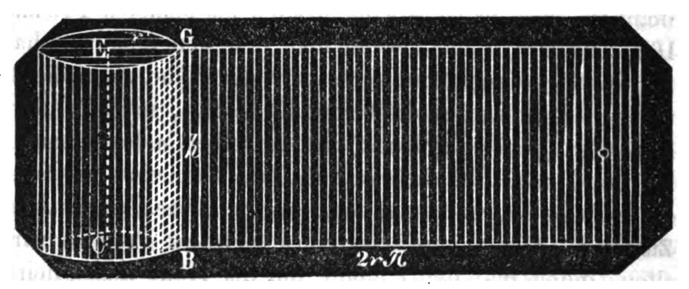
2. Wie gross ist der Cubicinhalt einer Säule von Sandstein, und wie gross ist ihr Gewicht, wenn ihre Höhe = 16′ 8″, ihre Grundfläche ein Quadrat ist, dessen Seiten = 2′ 9″ und das Gewicht von 1 Cubicfuss Sandstein = 158 ℔ ist.

3. Der Cubicinhalt einer Eisenstange ist 3 Cubicfuss 8 Cubiczoll (3 Φ′ 8 Φ″), die Grundfläche ist ein Rechteck, dessen eine Seite = 8″, die andere = 6″; wie lang ist die Stange?

Antwort. (1) $V = 438\frac{17}{36}$ Φ′ = 438 Φ′ 816 Φ″. (2) $146\frac{1}{24}$ Φ′ = 126 Φ′ 72 Φ″. Gewicht = $19914\frac{7}{12}$ ℔. (3) $9\frac{7}{12}$ Fuss.



164.



Lehrsatz. 1) Der Cubicinhalt eines Cylinders ist gleich dem Producte aus Grundfläche und Höhe; 2) Die Seitenfläche des Cylinders ist gleich dem Product aus dem Umfang und der Höhe.

Bezeichnet h die Höhe des Cylinders, r den Radius der Grundfläche, V den Cubicinhalt und F die Seitenfläche, so ist in Zeichen:

$$V = hr^2\pi \cdots\cdots\cdots (1)$$
$$F = 2r\pi h \cdots\cdots\cdots (2)$$

Beweis. Der Cylinder kann als ein regelmässiges Prisma von unendlicher Seitenzahl betrachtet werden. Da nun die Grundfläche $= r^2\pi$ (§. 140) und die Höhe h, so ist $V = hr^2\pi$. Was die Seitenfläche (Mantelfläche) betrifft, so kann man sich dieselbe vom Cylinder abgewickelt denken und erhält dann offenbar, wenn (wie für die Flächenberechnung vorausgesetzt wird) der Cylinder ein grader ist, ein Rechteck, dessen Höhe $= h$, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Grundfläche $= 2r\pi$ ist (§. 140). Die Formel (1) gilt selbstverstanden auch für einen schiefen Cylinder; die Seitenfläche eines solchen kann aber nur durch höhere Mathematik gefunden werden, weil die Abwickelung kein Rechteck giebt. Zufolge §. 162, Zusatz 2 ist die Seitenfläche eines schiefen Cylinders gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Seitenlinie, und dessen Höhe gleich dem Umfange eines auf der Seitenlinie senkrechten Durchschnitts ist. Dieser Umfang ist aber kein Kreis und lässt sich, wie gesagt, nur durch höhere Mathematik berechnen, für practische Zwecke aber leicht genau genug messen.

165.

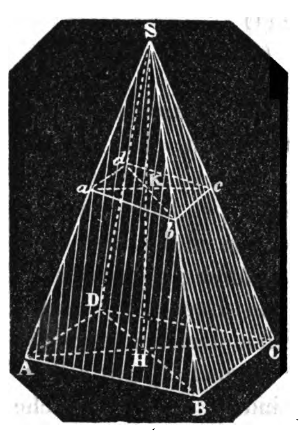
Aufgaben. 1. Wie gross ist der Inhalt V, und die Seitenfläche F eines Cylinders, dessen Höhe $h = 4' \, 8''$, und dessen Radius $r = 9''$ ist.

2. Ein cylindrisches Gefäss soll $V = 80$ ⌀' halten, der Radius desselben $r = 2' 4''$ sein. Wie gross muss seine Höhe h genommen werden.

3. Ein Cylinder soll $h = 2'\,9''$ hoch sein und $V = 22$ ⌀' Inhalt haben. Wie gross muss der Radius der Grundfläche sein.

Antwort. Es ist (1) $V = 8\frac{1}{4}$ ⌀' und $F = 22\,\square'$. (2) $h = 4\frac{4}{7}' = 4'\,8\frac{8}{77}''$. (3) $r = 1{,}595' \ldots$

166.



Lehrsatz. Der Durchschnitt einer Pyramide, welcher mit der Grundfläche parallel ist, ist mit derselben ähnlich, und die Flächeninhalte des Durchschnitts und der Grundfläche verhalten sich, wie die Quadrate der zugehörigen Höhen.

$$abcd : ABCD = \overline{SK}^2 : \overline{SH}^2.$$

Beweis. Weil die Linien ab, AB in parallelen Ebenen liegen, so können sie sich nicht schneiden, weil sie aber zugleich auch in einerlei Ebene liegen, nämlich in der Ebene des Dreiecks SAB, so sind sie parallel. Aus gleichem Grunde ist auch $bc \parallel BC$ etc. Die Winkel des Durchschnitts und die der Grundfläche sind also paarweise gleich (§. 154). Ferner ist nun auch (§. 117), $ab : AB = Sa : SA$ oder auch, indem man noch die Fusspuncte K und H der Perpendikel SK, SH mit den Eckpuncten des Durchschnitts und der Grundfläche verbunden denkt, weil dann auch $aK \parallel AH$, $bK \parallel BH$ etc.

$$ab : AB = Sa : SA = SK : SH$$

eben so: $bc : BC = Sb : SB = SK : SH$ etc.

Es verhalten sich also je zwei parallele Seiten, wie $SK : SH$, daher:

$$ab : AB = bc : BC = cd : CD \text{ etc.}$$

mithin ist: $abcd \sim ABCD$ (§. 116).

Nach §. 125 ist nun $abcd : ABCD = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$. Weil aber $SK : SH = ab : AB$, also auch $\overline{SK}^2 : \overline{SH}^2 = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$, so ist auch, wie der Lehrsatz behauptet, $abcd : ABCD = \overline{SK}^2 : \overline{SH}^2$

Wäre z. B. SH zwei, drei, viermal grösser, als SK, so wäre die Grundfläche vier, neun, sechszehnmal so gross, als die Fläche des Durchschnitts.

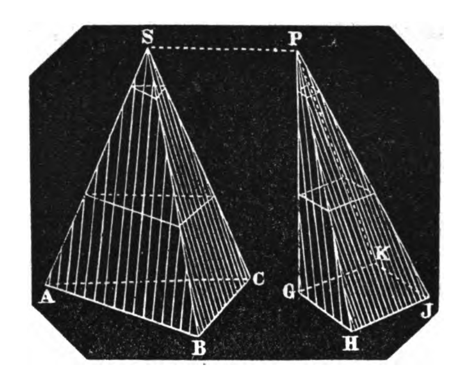
Beispiel 1. Es sei SK $= 5'$, SH $= 12'$, ABCD $= 40\Box'$. Wie gross ist $abcd = x$?

Antwort. Man hat $x : 40 = 5^2 : 12^2$ und hieraus $x = 6\frac{17}{18}\Box'$

Beispiel 2. Es sei SH $= 12'$, ABCD $= 60\Box'$. Der Durchschnitt $abcd$ soll $20\Box'$ sein, auf welcher Höhe SK $= x$ muss er genommen werden?

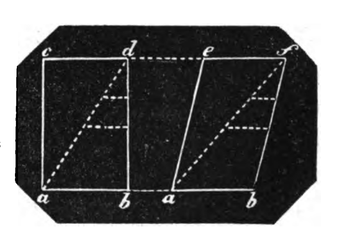
Antwort. Aus $20 : 60 = x^2 : 144$ folgt $x = 6',9\cdots$

167.



Lehrsatz. Pyramiden von gleich grosser Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

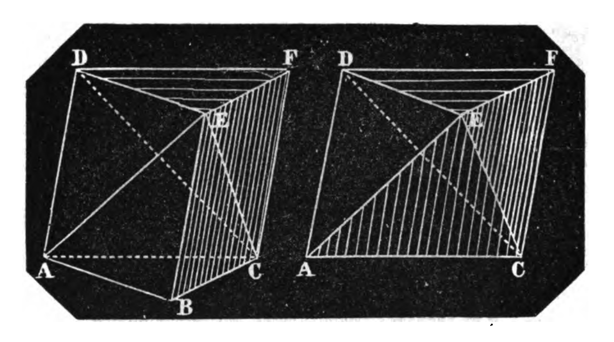
Beweis. Man überlege erst Folgendes: Wenn zwei gleiche grade Linien, $ab = ab$, sich parallel mit sich selbst auf gleiche Höhe bewegen, so beschreiben sie offenbar gleiche Flächen (§. 96, Zusatz). Auch müssen sie gleich grosse Flächen beschreiben, wenn sie bei ihrer parallelen Bewegung gleichzeitig und in demselben Verhältniss bis zu Null abnehmen. Auf diese Weise kann man sich die Dreiecke dab, fab beschrieben denken, wenn die Seiten ab auf der Hälfte ihres Weges um die Hälfte, auf dreiviertel ihres Weges um dreiviertel u. s. f. abnehmen.



Eben so kann man sich nun die beiden Pyramiden beschrieben denken. Sind nämlich, wie der Lehrsatz voraussetzt, ihre Grundflächen gleich gross, ABC = GHJK, und ihre Höhen gleich, so sind auch je zwei Durchschnitte von gleicher Höhe einander gleich, weil sie stets nach §. 166 die gleichvielsten Theile von den gleichen Grundflächen sind. Bewegen sich nun die gleichen Grundflächen parallel mit sich selbst auf gleiche Höhe, so beschreiben sie offenbar gleich grosse Prismen, und eben so auch gleich grosse Pyramiden, indem sie hierbei gleichzeitig und im erwähnten Verhältniss bis zu Null abnehmen.



168.

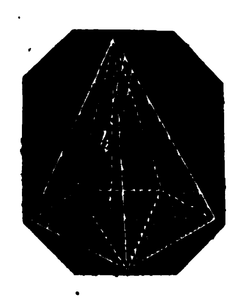


Lehrsatz. Ein dreiseitiges Prisma ist so gross, als drei Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. Man lege durch die drei Puncte E, A, C eine Ebene, diese geht dann durch die Linie AC (§§. 5 und 146) und schneidet also eine Pyramide, E, ABC, ab, welche E zur Spitze und ABC zur Grundfläche, also dieselbe Höhe und dieselbe Grundfläche, wie das Prisma hat. Denkt man sich diese Pyramide E, ABC vom Prisma weggenommen, so bleibt eine vierseitige, in Figur 2 dargestellte Pyramide übrig, welche E zur Spitze und das Parallelogramm DFCA zur Grundfläche hat; legt man nun wieder durch die drei Puncte E, D, C eine Ebene, so theilt diese die vierseitige Pyramide E, DFCA in zwei dreiseitige, welche die gemeinschaftliche Spitze E haben, und wovon die links liegende Pyramide DAC die rechts liegende DFC zur Grundfläche hat. Diese beiden Pyramiden E, DAC und E, DFC sind aber gleich gross (§. 167), und da

die rechts liegende Pyramide, in welcher man auch C als Spitze und DFE als die Grundfläche betrachten kann, den zuerst abgeschnittenen Pyramide E, ABC gleich ist, so sind alle drei Pyramiden, in welche das Prisma zerlegt werden, gleich gross, und folglich ist, wie der Lehrsatz behauptet, ein dreiseitiges Prisma so gross, als drei Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe.

169.



Lehrsatz. Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Theil vom Producte aus Grundfläche und Höhe, oder, was dasselbe sagt, gleich der Grundfläche mit einem Drittel der Höhe multiplicirt.

Bedeutet F den Quadratinhalt der Grundfläche, h die Höhe und V den Inhalt der Pyramide, so ist in Zeichen:

$$V = \frac{1}{3}hF.$$

Beweis. Jede Pyramide, die keine dreiseitige ist, kann durch Diagonalebenen in solche zerlegt werden, und da nun nach §. 168 jede dreiseitige Pyramide gleich dem dritten Theil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so muss auch jede noch so vielseitige Pyramide gleich dem dritten Theil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe sein. Der Inhalt eines Prismas ist nun aber gleich dem Product aus Grundfläche und Höhe (§. 162), mithin der Inhalt einer Pyramide gleich dem Product aus Grundfläche und einem Drittel der Höhe.

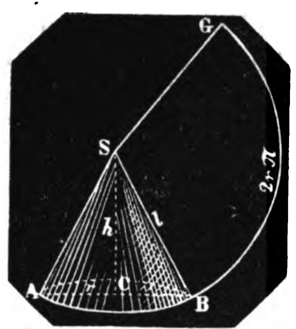
Zusatz. Um die Seitenfläche einer Pyramide zu bestimmen, muss man die Seitendreiecke einzeln berechnen und dann addiren.

Aufgabe. Eine der egyptischen Pyramiden (ganz von Marmor) soll 800′ hoch und die Grundfläche ein Quadrat sein, dessen Seiten ebenfalls 800 Fuss (?) Wie gross ist der Inhalt V dieser Pyramide?

Antwort. Es ist $V = 170666666\frac{2}{3}\,\Phi'$.



170.



Lehrsatz. 1) Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem Product aus der Grundfläche und einem Drittel der Höhe. 2) Die Seitenfläche eines graden Kegels ist gleich dem Product aus dem halben Umfange und der Seitenlinie.

Bedeutet V den Inhalt, F die Seitenfläche, h die Höhe, l die Seitenlinie und r den Radius des Kegels, so ist in Zeichen:

$$V = \tfrac{1}{3}hr^2\pi \cdots\cdots (1)$$
$$F = lr\pi \cdots\cdots\cdots (2)$$

Beweis 1. Man kann den Kegel als eine regelmässige Pyramide von unendlicher Seitenzahl betrachten; er ist deshalb auch, was sein Inhalt betrifft, gleich dem dritten Theil eines Cylinders von derselben Grundfläche und Höhe.

2. Was die Seitenfläche (Mantelfläche) betrifft, so kann man dieselbe vom Kegel abgewickelt denken. Die Abwickelung giebt dann, wenn der Kegel grade ist, offenbar einen Kreisausschnitt, dessen Bogen, BG, gleich dem Umfange des Grundkreises, und dessen Radius gleich der Seitenlinie des Kegels ist. (§. 141, 2.)

Anmerkung. Der Inhalt eines schiefen Kegels wird auf dieselbe Weise nach Formel (1) berechnet, die Seitenfläche eines schiefen Kegels kann aber nur durch höhere Mathematik gefunden werden, weil die Abwickelung keinen Kreisausschnitt bildet.

171.

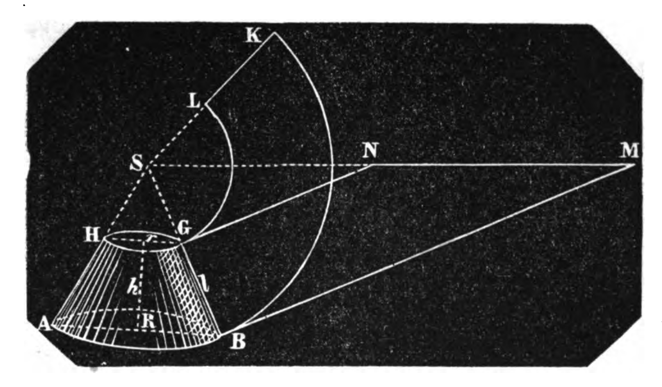
Aufgaben. 1. Der Radius eines graden Kegels sei $r = 3'$, die Höhe $h = 4'$, also die Seitenlinie $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 5'$. Wie gross ist der Inhalt V und die Seitenfläche F?

2. Der Inhalt eines Kegels ist V = 6 Φ' 48 Φ'', der Radius $r = 10''$. Wie gross ist die Höhe h?

3. Der Inhalt eines Kegels ist V = 30 Φ', die Höhe h = 8′ 9″. Wie gross ist der Radius r?

Antw. (1) $V = 37\frac{5}{7}$ Φ'. $F = 47\frac{1}{7}$ □'. (2) $h = 8\frac{1}{5}\frac{67}{550}$'. (3) $r = 1',8$.

172.



Lehrsatz. Die Seitenfläche eines parallel mit der Grundfläche abgekürzten Kegels ist gleich der Fläche eines Trapezes, dessen parallele Seiten gleich den Peripherien der beiden parallelen Grundflächen, und dessen Höhe gleich der Seitenlinie ist.

Bedeutet also $l = GB$ die Seitenlinie, so ist in Zeichen:

$$F = (R + r)\pi l.$$

Beweis. Man denke sich den abgekürzten Kegel zu einem ganzen ergänzt und dann abgewickelt. Stellt nun die auf SB senkrechte Linie BM die Länge der untern Peripherie ($2R\pi = \widehat{BK}$) dar, so ist die auf SG senkrechte Linie GN nothwendig gleich der obern Peripherie ($2r\pi = \widehat{GL}$); denn die Bögen $\widehat{BK}$, $\widehat{GL}$ verhalten sich wie ihre Radien SB, SG; wie diese verhalten sich aber auch die Linien BM, GN. Stellt also das Dreieck SBM die Seitenfläche des ganzen Kegels dar, so enthält das Dreieck SGN die Seitenfläche des Ergänzungskegels, und mithin das Trapez GBMN die Seitenfläche des abgekürzten Kegels. In dem Trapez ist nun aber $BM = 2R\pi$, $GN = 2r\pi$. Folglich ist (§. 103):

$$F = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot l = (R\pi + r\pi)l = (R + r)\pi l.$$

Dieser Satz folgt übrigens auch ganz einfach aus der Betrachtung der Figur GLKB, welche man sich als ein Trapez denken kann. Wäre z. B. $R = 3'$, $r = 1'$ und $l = 5'$; so wäre $F = 62\frac{6}{7}$ □'.

Sechszehntes Buch.

Von der Kugel.

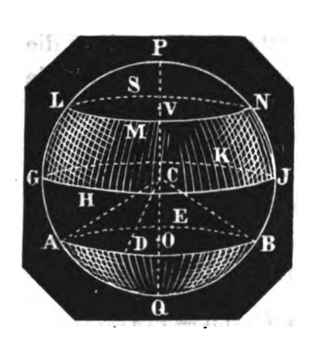
173.

Erklärungen. Die Kugel ist ein Körper von einer einzigen krummen Fläche dergestalt begrenzt, dass alle Puncte derselben von einem innerhalb liegenden Punct, Mittelpunct, gleich weit entfernt sind.

Jede vom Mittelpunct bis an die Oberfläche gehende Linie heisst Radius, und jede durch den Mittelpunct nach beiden Seiten bis an die Oberfläche gehende Linie heisst Durchmesser.



174.



Lehrsatz. Jeder ebene Durchschnitt einer Kugel ist ein Kreis.

Beweis. Verbindet man beliebige Grenzpuncte, A, D, B, E, des Durchschnitts ADBE mit dem Mittelpunct C, so sind diese Verbindungslinien CA, CD, CB··, als Radien der Kugel einander gleich, mithin ist nach §. 151 die krumme Linie ADBEA auf der Kugel ein vollkommener Kreis, dessen Mittelpunct der Fusspunct O des von C auf die Ebene des Kreises (Durchschnitts) gefällten Perpendikels ist.

Zusatz. Errichtet man auf der Ebene eines Kugelkreises, ADBE, im Mittelpunct O ein Perpendikel, so muss dies durch den Mittelpunct der Kugel gehen.

175 a.

Erklärungen. 1. Jeder Kreis auf der Kugel, dessen Ebene durch den Mittelpunct geht, wie GHJK, heisst ein grösster, jeder andere aber, dessen Ebene nicht durch den Mittelpunct geht, wie ADBE, heisst ein kleinerer Kreis.

Es ist klar, dass alle grössten Kreise einander gleich sind, dass jeder die Kugel halbirt, und dass auch je zwei grösste Kreise sich halbiren, weil ihre Radien dem der Kugel gleich sind (vergl. §. 19).

2. Die Endpuncte P, Q eines Durchmessers, der durch den Mittelpunct O eines Kugelkreises, ADBE, geht und auf dessen Ebene senkrecht steht,*) heissen die Pole des Kreises.

3. Alle Kreise auf der Kugel, deren Ebenen parallel sind, heissen Parallelkreise. Parallelkreise, wie ADBE, GHJK, haben also gemeinschaftliche Pole.

4. Das körperliche Stück einer Kugel, welches, wie AQB, von der Ebene eines Kreises und einer krummen Fläche begrenzt wird, heisst Kugelabschnitt, die den Kugelabschnitt mit begrenzende krumme Fläche heisst Kugelhaube, und das auf dem Grundkreise im Mittelpunct errichtete Perpendikel OQ heisst die Höhe des Abschnitts und der Haube.

5. Ein Streifen von der Kugeloberfläche, welcher, wie LJ, von zwei Parallelkreisen, GHJK und LMNS, begrenzt wird, heisst eine Zone (Gürtel), und das von der Zone und den Ebenen der beiden Parallelkreise begrenzte körperliche Stück der Kugel heisst Zonenabschnitt. Der Abstand der beiden parallelen Kreisebenen, nämlich CV, heisst die Höhe der Zone und des Zonenabschnitts.

6. Das Stück einer Kugel, welches, wie C, AQB, aus einem Kegel, CAB, und einem daran liegenden Haubenabschnitt, AQB, besteht, heisst ein Kugelausschnitt.

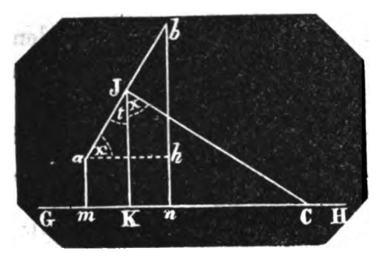
Anmerkung. Man kann sich sowohl die ganze Kugel, als auch ihre eben erklärten Theile auf folgende Weise entstanden denken: Der Halbkreis PNBQ drehe sich um den Durchmesser PQ, wie um eine Achse, so beschreibt die Fläche des Halbkreises die Kugel, die halbe Peripherie PNBQ die Kugeloberfläche, die Puncte N, J, B Parallelkreise, deren Pole (Drehpuncte) P und Q sind; der Bogen PN beschreibt eine

*) Bei kleinern Kreisen, wie hier ADBE, ist dies von selbst der Fall. (§. 174 Zus.)

Haube, der Bogen NJ eine Zone, der Kreisausschnitt CQB einen Kugelausschnitt etc.

Was nun die Berechnung der Oberfläche und des Inhalts der Kugel, so wie auch Stücke derselben betrifft, so wird dies jedem sehr leicht begreiflich werden, der den folgenden Hülfssatz, welcher den Schlüssel dazu giebt, gut versteht.

175b.



Hülfssatz. Wenn eine grade Linie, ab, sich um eine Achse, GH, ganz herumdreht, so lässt sich die Fläche F, welche sie beschreibt, nach der Formel:

$$F = 2CJ \cdot \pi \cdot mn$$

berechnen, worin CJ das auf der Mitte der Linie ab errichtete, bis an die Achse GH gehende Perpendikel, π die bekannte Zahl $3\frac{1}{7}$, und mn das Stück der Achse ist, welches die von a und b darauf gefällten Perpendikel zwischen sich fassen.

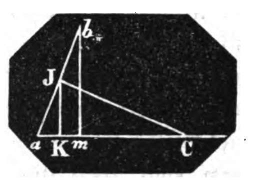
Beweis. Zuerst ist klar, dass die Linie ab die Seitenfläche eines abgekürzten Kegels beschreibt, dessen parallele Radien am und bn sind und dessen Seitenlinie ab ist. Nach §. 172 ist also die Fläche, welche die Linie ab nach ihrer ganzen Umdrehung beschrieben hat:

$$F = (bn + am)\pi \cdot ab \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

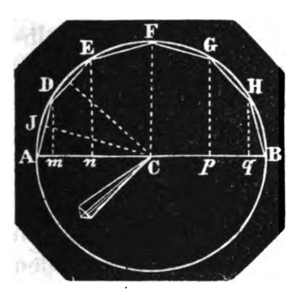
Dieser Ausdruck muss nun aber, um ihn auf die Kugel anwenden zu können, zweimal umgeformt werden. Denkt man sich von der Mitte J der Linie ab das Perpendikel JK auf die Achse gefällt, so ist leicht einzusehen, dass $2JK = bn + am$ ist. (Man denke sich nur durch J eine Parallele mit mn gezogen, die dann zu am dasselbe Stück hinzusetzt, welches sie von bn abschneidet.) Man darf also in der Formel (1) 2JK statt $bn + am$ setzen, und es ist daher auch:

$$F = 2JK\pi \cdot ab \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(jedes hat einen rechten Winkel, dann $x+t=x'+t=90°$, woraus $x=x'$) mithin $ab:CJ=ah:JK$, oder, weil $mn=ah$, auch $ab:CJ=mn:JK$, hieraus: $CJ\cdot mn=JK\cdot ab$. Man kann also in die zweite Formel $CJ\cdot mn$ statt $JK\cdot ab$ setzen, und man hat dann für die von ab beschriebene Fläche folgende im Lehrsatz behauptete Formel: $F=2CJ\pi\cdot mn$. Diese Formel gilt auch, wenn der eine Endpunct a der Linie ab in der Achse liegt, alsdann beschreibt ab die Seitenfläche eines ganzen Kegels, und es ist dann (§. 170) $F=bm\cdot\pi\cdot ab$, oder auch, weil $2JK=bm$ ist: $F=2JK\pi\cdot ab$. Ferner: da $\triangle abm \sim \triangle CJK$ ist, $ab:CJ=am:JK$, hieraus: $CJ\cdot am=JK\cdot ab$. Daher auch: $F=2CJ\pi\cdot am$.



176.



Lehrsatz. Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so gross, als die Fläche eines grössten Kreises, und der Inhalt der Kugel so gross, als der eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche, und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

Bedeutet r den Radius, d den Durchmesser, F die Oberfläche und V den Cubicinhalt der Kugel, so ist:

$$F=4r^2\pi=d^2\pi \cdots\cdots (1)$$

$$V=\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{d^3}{6}\pi \cdots\cdots (2)$$

Beweis. In dem die Kugel beschreibenden Halbkreis denke man sich ein regelmässiges Vieleck beschrieben und suche zuerst eine Formel für die Fläche, welche dieses regelmässige Vieleck beschreibt, indem es sich um den Durchmesser AB ganz herum dreht. Weil alle Vielecksseiten gleich, folglich auch alle auf ihren Mitten errichteten und durch den Mittelpunct C gehenden Perpendikel gleich sind (§. 71, Zusatz), so ist, nach §. 175 b, die Fläche, welche die Seite AD beschreibt, $=2CJ\pi\cdot Am$, die Fläche, welche die folgende Seite DE be-

schreibt, $= 2\,CJ\pi \cdot mn$, die Fläche, welche EF beschreibt, $= 2\,CJ\pi \cdot nC$ u. s. w., mithin die Fläche, welche das ganze Vieleck beschreibt:

$$= 2\,CJ\pi \cdot Am + 2\,CJ\pi \cdot mn + \cdots\cdots + 2\,CJ\pi \cdot qB$$

oder, indem man den, allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor $2\,CJ\pi$ heraussetzt und ihn so oft nimmt, als alle Theile des Durchmessers Am, mn, $nC \cdots\cdot$ zusammen Einheiten enthalten, d. i. mit dem Durchmesser AB, multiplicirt, $= 2\,CJ\pi \cdot AB$.

Man erhält also die Fläche, welche ein regelmässiges Vieleck beschreibt, indem man die Peripherie des dem Vieleck eingeschriebenen Kreises $2\,CJ \cdot \pi$ mit dem Durchmesser AB multiplicirt. Dieser Satz ist immer richtig, wie viel Seiten das regelmässige Vieleck auch haben möge. Denkt man sich also die Seitenzahl des regelmässigen Vielecks immerfort verdoppelt, so ändert sich in dem oben gefundenen Ausdruck $2\,CJ\pi \cdot AB$ bloss der Factor CJ, der mit jeder Verdoppelung der Seitenzahl immer grösser, und zuletzt, wo diese Verdoppelung aufhört, und das Vieleck in einen Halbkreis übergeht, dem Radius CA gleich wird. Es ist mithin die Fläche, welche der Halbkreis beschreibt, d. i. die Oberfläche der Kugel, $= 2\,CA\pi \cdot AB$, oder, den Radius der Kugel $CA = r$, den Durchmesser $AB = 2r$, die Oberfläche $= F$ gesetzt: $F = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi = d^2\pi$.

Durch ähnliche Schlüsse, wie in §. 137, gelangt man nun auch leicht zu dem im Lehrsatz angegebenen Ausdruck für den Inhalt der Kugel. Denkt man sich nämlich innerhalb der Kugel um den Mittelpunct herum an einander liegende regelmässige dreiseitige Pyramiden von gleicher Grundfläche und folglich auch von gleicher Höhe gelegt, so dass ihre Spitzen im Mittelpunct, die Eckpuncte ihrer Grundflächen in der Oberfläche der Kugel, die Grundflächen selbst also innerhalb der Kugel liegen, so ist die Summe aller dieser Pyramiden kleiner, als die Kugel. Denkt man sich die Grundflächen dieser gleichen regelmässig eingeschriebenen Pyramiden immer kleiner, folglich ihre Höhe immer grösser werdend, so kommt die Summe dieser Pyramiden dem Inhalte der Kugel immer näher. Die jedesmalige Summe dieser eingeschriebenen Pyramiden ist aber gleich einer einzigen Pyramide von derselben Höhe, und deren Grundfläche gleich der Summe aller eingeschriebenen Grundflächen. Da nun diese Vorstellung bis an die Grenze Statt findet, wo

die Höhe der eingeschriebenen Pyramiden gleich dem Radius der Kugel, und die Summe der immer kleiner werdenden Grundflächen gleich der Oberfläche der Kugel wird, so wird man zu dem nothwendigen Schluss getrieben, dass die Kugel nicht kleiner und nicht grösser,*) mithin gerade so gross ist, als eine Pyramide oder ein Kegel, dessen Höhe gleich dem Radius (r), und dessen Grundfläche gleich der Oberfläche der Kugel ($4r^2\pi$), mithin ihr Inhalt $= \frac{1}{3}r \cdot 4r^2\pi = \frac{4}{3}r^3\pi$ ist.

177.

Aufgaben. 1. Der Radius einer Kugel ist $r = 5$ Zoll. Wie gross ist die Oberfläche F und der Cubicinhalt V?

2. Wie viel Ellen $\frac{5}{4}$ breiten Taffet sind erforderlich, um einen kugelförmigen Luftballon zu bekleiden, dessen Radius $= 10' \, 4''$? (NB. 1 Elle = 2 Fuss.)

3. Die Oberfläche einer Kugel ist $= 120 \square' \, 9 \square''$. Wie gross ist der Radius?

4. Eine Kugel, deren Radius $= 0',4$ ist, soll vergoldet werden. Wie theuer kommt dies, wenn für den Decimal-Quadratzoll 4 Ggr. bezahlt wird?

5. Die Oberfläche einer Kugel ist $= 6,48 \square'$. Wie gross ist der Radius?

6. Der Cubicinhalt einer Kugel ist 148 Cubiczoll. Wie gross ist der Radius?

7. Man denke sich in einen Cylinder einen Kegel und eine Kugel gezeichnet, so dass die Radien aller drei Körper gleich sind, und die Höhe des Kegels und Cylinders gleich dem doppelten Radius ist. Wie verhalten sich diese drei Körper: Kegel, Kugel und Cylinder hinsichtlich ihres Volumens zu einander?

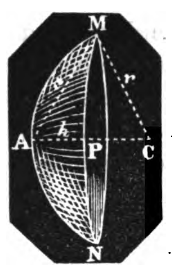
Antwort. (1) $F = 2 \square' \, 26\frac{2}{7} \square''$, $V = 523\frac{17}{21}$ Φ''; (2) $268\frac{148}{315}$ Ellen; (3) $r = 3',09$; (4) 33 Thlr. $12\frac{4}{7}$ Ggr.; (5) $r = 0',71 \cdots$; (6) $r = 3'',28$; (7) wie 1 : 2 : 3.**)

---

*) Man könnte sich auch noch gleiche regelmässige dreiseitige Pyramiden um die Kugel beschrieben denken.

**) Dieses merkwürdige Verhältniss entdeckte Cicero auf einem dem Archimed in Syracus gesetzten Denkmale.

178.



Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man die Fläche einer Kugelhaube berechnen kann.

Auflösung. Es sei AP $= h$ die Höhe der Haube, und r der Radius der Kugel. Denkt man sich nun in den, die Haube beschreibenden Bogen $\widehat{AM}$ Seiten eines regelmässigen Vielecks gezeichnet, und die Zahl derselben immerfort verdoppelt, bis der Radius des eingeschriebenen Kreises gleich CA wird, so folgt durch gleiche Schlüsse, wie in §. 176, dass, wenn F die Fläche der Haube AMN bezeichnet:

$$F = 2r\pi h.$$

Zusatz 1. Aus denselben Betrachtungen folgt, dass dieselbe Formel auch für eine Zone gilt, und dass alle Zonen von gleicher Höhe auf derselben Kugel auch gleiche Flächen haben

Zusatz 2. Denkt man sich vom Scheitel A der Haube nach einem Punct, M, der sie begrenzenden Peripherie die Sehne AM$=a$ gezogen, so ist (§. 126, Zusatz 1) $h : a = a : 2r$, hieraus: $a^2 = 2rh$. Wir können also in obiger Formel a^2 statt $2rh$ setzen und erhalten dann für die Fläche der Haube den Ausdruck:

$$F = a^2\pi,$$

welche Formel für die Praxis viel bequemer ist, indem man statt der Höhe und des Radius nur eine Sehne zu messen braucht.

Beispiel. Wie viel Quadratfuss Kupferblech sind zur Bedachung einer Kuppel erforderlich, wenn die vom höchsten zum tiefsten Punct gemessene Sehne AM = 14 Fuss ist.

Antwort. 616 □′.

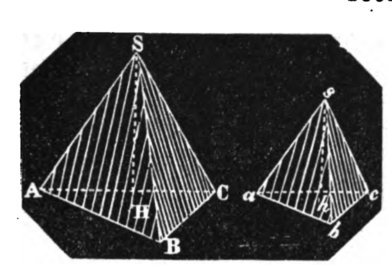
Siebzehntes Buch.

Ergänzungen.

179.

Erklärung. Zwei Körper heissen ähnlich, wenn die körperlichen Winkel wechselweise gleich sind, und je zwei ähnlich liegende Kanten dasselbe Verhältniss zu einander haben, alsdann sind offenbar auch die Seitenflächen ähnlich, und beide Körper an Form vollkommen gleich, und nur an Grösse verschieden.

180.



Lehrsatz. Die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich, wie die Cuben ähnlich liegender Seiten.

Beweis. Man braucht nur zu zeigen, dass der Satz für ähnliche Pyramiden gilt, weil ähnliche Körper in solche zerlegt werden können.

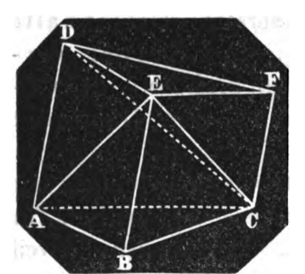
Sei demnach Pyramide S, ABC $\sim$ Pyramide *s*, *abc*. Weil alle ähnlich liegende Seiten einerlei Verhältniss zu einander haben, und die Winkel wechselweise gleich sind, so sind erstens die Grundflächen ähnlich und verhalten sich, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten (§. 125); wie diese Seiten, so verhalten sich aber auch die Höhen der Pyramiden, nämlich $sh : SH = ab : AB$, also auch $\frac{1}{3} sh : \frac{1}{3} SH = ab : AB$. Man hat also:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} &= \frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}\\ \frac{\frac{1}{3}SH}{\frac{1}{3}sh} &= \frac{AB}{ab}\end{aligned}\right\}$$ Beide Gleichungen mit einander multiplicirt, kommt $\frac{\frac{1}{3}SH \cdot \triangle ABC}{\frac{1}{3}sh \cdot \triangle abc} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3}$

d. h. der Inhalt der kleinern Pyramide ($\frac{1}{3}sh \cdot \triangle abc$) ist so oft in dem Inhalt der grössern ($\frac{1}{3}SH \cdot \triangle ABC$) enthalten, als der Cubus einer Seite der kleinern Pyramide in dem Cubus der ähnlich liegenden Seite der grössern. Wäre z. B. AB zweimal so gross als ab, so wäre der Cubicinhalt der grössern Pyramide $2^3 = 8$mal so gross, als der der kleinern. Denkt man sich nun zwei ähnliche Körper in ähnliche Pyramiden zerlegt, so verhalten sich je zwei ähnliche Pyramiden, also auch die Summe der Pyramiden in dem einen Körper zur Summe in dem andern und mithin die beiden ähnlichen Körper selbst, wie die Cuben zweier ähnlich liegenden Seiten.

Soll ein Körper construirt werden, dessen Inhalt $m$mal so gross ist, als der eines ähnlichen Körpers, so müssen die ähnlich liegenden Seiten sich wie 1 zu $\sqrt[3]{m}$ verhalten. Für Kugeln, Kegel und Cylinder folgt der Lehrsatz von selbst aus den Formeln.

181.



*) **Lehrsatz.** Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist so gross, als drei Pyramiden, welche die Grundfläche des Prismas ABC zu Grundflächen und die drei gegenüber liegenden Ecken E, D, F zu Spitzen haben.

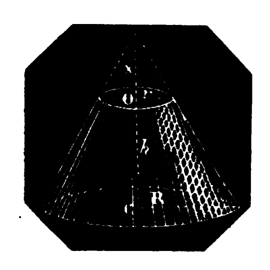
Beweis. Legt man zuerst durch die drei Puncte EAC eine Ebene, so schneidet diese eine Pyramide E, ABC ab. Es bleibt nun noch eine vierseitige Pyramide übrig, welche E zur Spitze und das Trapez DACF zur Grundfläche hat. Diese wird durch eine durch D, E, C gelegte Ebene in zwei dreiseitige zerlegt, E, DAC und E, DFC. Denkt man sich nun die Spitze E der links liegenden Pyramide E, DAC parallel mit der Grundfläche DAC (also in gleich

bleibender Höhe) nach B verschoben, so ist dadurch die Pyramide E, DAC in die gleich grosse B, DAC verwandelt (§. 167). In letzterer kann man nun aber auch D als Spitze und ABC als Grundfläche betrachten. Die dritte Pyramide E, DFC endlich, kann man erst in die Pyramide E, AFC*) verwandelt denken, indem die Grundflächen DFC und AFC, als Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe, gleich gross sind. Denkt man sich nun bei dieser Pyramide E, AFC die Spitze E in gleich bleibender Höhe nach B verlegt, so ist sie in die Pyramide B, AFC verwandelt, bei welcher man aber auch F als Spitze und ABC als Grundfläche betrachten kann.

Bezeichnen also h, h', h'' die drei von den Ecken E, D, F auf die Grundfläche ABC = F, gefällten Perpendikel, und V den Inhalt des schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas, so ist:

$$V = \frac{h + h' + h''}{3} \cdot F.$$

182.



Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man den Inhalt V eines abgekürzten Kegels aus den beiden parallelen Radien R, r und der Höhe $h = OC$ berechnen kann.

Auflösung. Setzt man die unbekannte Höhe des Ergänzungskegels vorläufig $= x$, so ist: **)

$$V = \frac{(h+x)}{3} R^2 \pi - \frac{x}{3} r^2 \pi$$

$$\text{oder } V = \frac{h}{3} R^2 \pi + \frac{x}{3} (R^2 - r^2) \pi \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Zur Bestimmung der unbekannten Höhe x hat man:

$$x : h + x = r : R \text{ und hieraus } x = \frac{hr}{R - r}$$

---

*) Man denke die Linie AF gezogen.

**) Bei diesen Anwendungen der Algebra auf Geometrie muss die Kenntniss der erstern Wissenschaft vorausgesetzt werden.

Diesen Werth von x in die Gleichung (1) substituirt, kommt:

$$V = \tfrac{1}{3} h R^2 x + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{hr}{R-r} (R^2 - r^2) x$$

und hieraus nach gehöriger Reduction die verlangte Formel: *)

$$V = \frac{hx}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Beispiel. Sei $R = 2' 4''$, $r = 1' 6''$, $h = 2' 6''$, so ist $V = 29\frac{241}{756}\ \Phi'$.



183.



Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man den Inhalt V einer abgekürzten Pyramide aus deren beiden parallelen Grundflächen, F, f, und der Höhe h berechnen kann.

Auflösung. Die Höhe der Ergänzungspyramide sei $= x$, so ist:

$$V = \frac{h+x}{3} \cdot F - \frac{x}{3} f$$

oder $V = \tfrac{1}{3} hF + \tfrac{1}{3} x (F - f) \cdots\cdots\cdots (1)$

Ferner ist (§. 166):

$$\frac{x^2}{(h+x)^2} = \frac{f}{F} \text{ also } \frac{x}{h+x} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{F}} \text{ und hieraus: } x = \frac{h\sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}}$$

Diesen für x gefundenen Ausdruck in die Gleichung (1) substituirt, kommt:

$$V = \tfrac{1}{3} hF + \frac{\tfrac{1}{3} h \sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} (F - f)$$

$$\text{oder } V = \tfrac{1}{3} hF + \tfrac{1}{3} h \sqrt{f} (\sqrt{F} + \sqrt{f})^{**)}$$

und hieraus nach gehöriger Reduction die verlangte Formel:

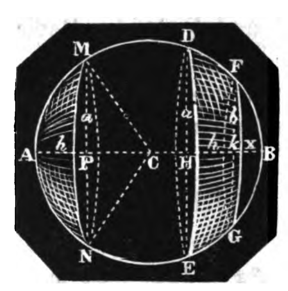
$$V = \frac{h}{3} (F + \sqrt{Ff} + f)$$

---

*) Es ist nämlich $\frac{R^2 - r^2}{R - r} = R + r$. (Algebra §. 143.)

**) Weil $\frac{F - f}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} = \sqrt{F} + \sqrt{f}$. (Algebra §. 215, 4.)

184.



Aufgabe. Eine Formel abzuleiten, nach welcher man den Inhalt eines Kugelausschnitts, C, MAN, berechnen kann, wenn der Radius r der Kugel und die Höhe der Haube, welche der Ausschnitt zur Grundfläche hat, $AP = h$ gegeben ist.

Auflösung. Was von der ganzen Kugel, als eine Summe von kleinen Pyramiden (Kegeln) gilt, gilt offenbar auch von einem Ausschnitt. Er ist nämlich gleich einem Kegel, dessen Höhe gleich dem Radius, und dessen Grundfläche die Haube ist. Letztere ist (§. 178) $= 2r\pi h$, folglich der Inhalt des Ausschnitts:

$$V = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h.$$

185.

Aufgabe. Den Inhalt eines Haubenabschnitts, MAN, aus der Höhe $AP = h$ und dem Radius der Kugel zu berechnen.

Auflösung. Man muss den Kegel CMN vom Ausschnitt C, MAN subtrahiren. Der Inhalt des Kegels ist $= \frac{CP}{3} \cdot \overline{MP}^2 \pi$, oder weil $CP = r - h$ und $\overline{MP}^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$ und der Inhalt des Ausschnitts nach (§. 184) $= \tfrac{2}{3} r^2 \pi h$, so ist der Abschnitt $V = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{r-h}{3} \cdot (2rh - h^2)\pi$, oder die Klammern aufgelöst und gehörig reducirt:

$$V = (r - \tfrac{1}{3} h) h^2 \pi \cdots\cdots\cdots (1)$$

Zusatz. Ist statt des Radius r der Kugel der bequemer zu messende Radius des Grundkreises des Abschnitts, $MP = a$ gegeben, so folgt aus §. 126: $h : a = a : 2r - h$; hieraus: $r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$. Dies statt r in obige Formel (1) substituirt, ist auch:

$$V = \frac{(3a^2 + h^2)}{6} \cdot h\pi \cdots\cdots (2)$$

186.

Aufgabe. Den Inhalt V eines Zonen-Abschnitts, DEGF, zu berechnen, wenn die Höhe HK $= h$ und die beiden Radien der Grundflächen DH $= a$ und FK $= b$ gegeben sind.

Auflösung. Man setze KB $= x$ und subtrahire den Abschnitt FBG vom Abschnitt DBE, so hat man den Zonen-Abschnitt (§. 185, Formel 2):

$$V = \frac{3a^2 + (h+x)^2}{6} \cdot (h+x)\pi - \frac{3b^2 + x^2}{6} \cdot x\pi$$

oder $$\frac{6V}{\pi} = 3a^2h + 3a^2x + h^3 + 3h^2x + 3hx^2 - 3b^2x$$

$$\frac{6V}{\pi} = 3a^2h + h^3 + 3(hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x)$$

Um x zu eliminiren, hat man, den Radius der Kugel $= r$ gesetzt (§. 126):

$$x : b = b : 2r - x, \quad \text{hieraus: } 2r = \frac{b^2}{x} + x$$

$$h + x : a = a : 2r - (x + h), \quad \text{hieraus: } 2r = \frac{a^2}{h+x} + x + h.$$

Mithin ist $\frac{b^2}{x} = \frac{a^2}{h+x} + h$ und hieraus folgt:

$$hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x = b^2h,$$

folglich nach Substitution und gehöriger Reduction:

$$V = \frac{h\pi}{2}(a^2 + b^2 + \tfrac{1}{3}h^2)$$

187.

Um den Inhalt ganz unregelmässiger Körper zu finden, muss man sie in Prismen oder Pyramiden zerlegen und die einzelnen Stücke berechnen. Geht dies nicht an, so muss man sich auf folgende Weise zu helfen suchen:

1) Hat man den Inhalt eines Hohlgefässes zu bestimmen, so kann man es mit Wasser füllen, dieses dann in einen senkrechten Cylinder oder ein Parallelepipedum von bekannter Grundfläche giessen, die Höhe, bis zu welcher das Wasser ihn anfüllt, messen, und hat dann diese nur mit der Grundfläche zu multipliciren. Ist der Cylinder (Parallelepiped)

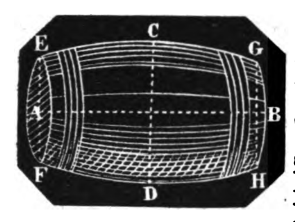
im Voraus, zu einem cubischen Maassstab dienend, gehörig graduirt, so kann man das Volumen, welches das Wasser in ihm einnimmt, unmittelbar ablesen.

2) Weiss man, wie viel ein Cubicfuss Wasser wiegt, so kann man auch aus dem Gewichte des Wassers, welches ein Hohlgefäss enthält, seinen Inhalt berechnen.

3) Ist der Inhalt eines nicht hohlen unregelmässigen Körpers zu bestimmen, so kann man ihn in einen hohlen Cylinder (Prisma) von bekannter Grundfläche legen, den leer bleibenden Raum so weit mit Wasser (Sand) ausfüllen, bis der Körper ganz bedeckt ist. Man nimmt dann den Körper wieder heraus und misst, um wie viel das Wasser im Cylinder jetzt niedriger steht, und multiplicirt diese Senkung mit der Grundfläche.

4) Man umgebe den Körper — er sei z. B. ein grosser auf dem Felde liegender Stein — mit einem prismatischen Körper (Parallelepipedum), dessen Inhalt man berechnen kann. Fülle den leer bleibenden Raum mit Sand (Erde) aus, berechne jetzt den ganzen prismatischen Körper und subtrahire den Cubicinhalt des zur Ausfüllung gebrauchten Sandes.

188.



*) Den cubischen Inhalt leerer Fässer berechnet man annäherungsweise nach einer der beiden folgenden Formeln, worin D = CD den grössten durch's Spund gemessenen Durchmesser, d = EF = GH den Durchmesser der parallelen Böden und h = AB die Länge des Fasses, V den Inhalt bedeutet, und $\pi = 3\frac{1}{7}$ ist.

$$V = \frac{h\pi}{9}\left(D + \tfrac{1}{2}d\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$V = \frac{h\pi}{15}\left(2D^2 + Dd + \tfrac{3}{4}d^2\right) \cdots\cdots (2)$$

Diese beiden, durch höhere Mathematik abgeleiteten Näherungsformeln, wovon die zweite das Volumen etwas genauer giebt, gründen sich auf die, allerdings nicht immer richtige Voraussetzung, dass die Fassdauben nur wenig und kreisförmig gekrümmt sind. Wäre z. B. $D = 4'$, $d = 3'$, $h = 6'$, so giebt die erste Formel: $V = 63\frac{8}{21}$ Φ′, die zweite Formel: $V = 63\frac{28}{35}$ Φ′.

189.

Regelmässige Körper. Regelmässige Vielecke, d. h. solche, deren Winkel und Seiten einander gleich sind, kann man von jeder beliebigen Seitenzahl, mithin unendlich viele verschiedene denken. Uebertragen wir aber diesen Begriff von Regelmässigkeit auch auf Körper, und nennen nur solche Körper regelmässige, deren Ecken (körperliche Winkel) einander gleich, und deren Seitenflächen gleiche und zugleich regelmässige Vielecke sind, so ergiebt sich, als eine nothwendige Folge und merkwürdiges Resultat unserer Denkgesetze, dass es solcher regelmässigen Körper nicht mehr, als fünf verschiedene geben kann.

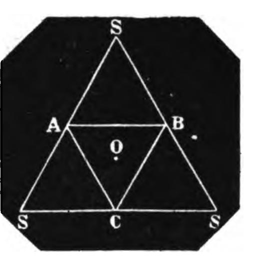
Der Grund liegt nämlich darin: dass 1) zur Bildung eines körperlichen Winkels (Ecke) wenigstens drei Ebenen erforderlich sind, und dass, wie ebenfalls leicht einzusehen, 2) alle Kantenwinkel (Linienwinkel), welche eine Ecke bilden (z. B. um die Spitze einer Pyramide herum liegen), zusammen allemal weniger, als vier rechte Winkel betragen.

Hieraus folgt nun sogleich, dass es keinen regelmässigen Körper geben kann, dessen Seitenflächen gleiche regelmässige Sechsecke und viel weniger noch regelmässige 7, 8, 9 · · · Ecke wären; denn schon im regelmässigen Sechseck beträgt jeder Winkel 120°. Drei solche Winkel können also nicht (weil 4 Rechte betragend) zur Bildung einer Ecke zusammengestellt werden, und wir haben es deshalb nur noch mit den regelmässigen 3, 4 und 5 Ecken zu versuchen.

Im regelmässigen Dreieck ist jeder Winkel = 60°. Drei, vier und auch fünf solche Winkel betragen weniger, als vier rechte, und können also eine Ecke bilden. Im regelmässigen Viereck ist jeder Winkel = 90°, und im regelmässigen Fünfeck = 108. Von jedem dieser Winkel können also nur drei eine Ecke bilden. Die gehörige Zusammentsellung giebt nun folgende fünf regelmässige Körper.

1. *Tetraeder*, dessen Seitenflächen regelmässige Dreiecke sind. — Man denke sich auf der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks, ABC, im Mittelpunct O ein Perpendikel errichtet und schneide dieses mit einer Seite, AB, aus einem Punct, A, in einem Punct, P, so giebt dieser Punct P mit A, B, C verbunden noch drei regelmässige, dem ABC gleiche Dreiecke, und es ist

leicht einzusehen, dass in der entstandenen Pyramide P, ABC auch die vier körperlichen Winkel (Ecken) einander gleich sind, weil jeder durch drei Kantenwinkel von je 60° gebildet. Zeichnet man, um das Netz des *Tetraeders* zu erhalten, über jede Seite des regelmässigen Dreiecks ABC wieder regelmässige Dreiecke, ABS etc., so kann man die ganze Figur aus dem Papier schneiden, und die äussern Dreiecke dachförmig gegen das innere aufschlagen.



2. *Hexaeder*, dessen sechs gleiche Seitenflächen Quadrate sind, wovon je drei eine Ecke bilden. Dieser Körper ist der schon bekannte Cubus, und dessen Netz leicht zu construiren.

3. *Octaeder*, dessen acht gleiche Seitenflächen regelmässige Dreiecke sind, wovon je vier eine Ecke bilden. Man denke sich auf der Ebene eines Quadrats, ABCD, im Mittelpunct O ein Perpendikel errichtet, und dieses durch die Ebene hindurch verlängert. Schneidet man dieses Perpendikel mit einer Seite, AB, aus A auf beiden Seiten des Quadrats in den Puncten P und P′, und verbindet diese mit A, B, C, D, so hat man über der Grundfläche ABCD zwei gleiche entgegengesetzte Pyramiden gezeichnet, welche das *Octaeder* bilden.

4. *Dodecaeder*, dessen zwölf gleiche Seitenflächen regelmässige Fünfecke sind, und wovon jede der zwanzig Ecken aus drei Kantenwinkeln von je 108° gebildet ist.

5. *Icosaeder*, dessen zwanzig gleiche Seitenflächen wiederum regelmässige Dreiecke sind, und wovon jede seiner 12 Ecken durch 5 Kantenwinkel von je 60° gebildet wird.

Die genauere Beschreibung und Netzzeichnung der drei letzten regelmässigen Körper, so wie die Berechnung derselben würde zu viel Raum einnehmen, und da die vollständige Theorie dieser Körper doch nur rein wissenschaftliches Interesse hat, so müssen wir uns darauf beschränken, den merkwürdigen Umstand, dass es nur fünf verschiedene Arten regelmässige Körper geben kann, kurz angedeutet zu haben. Hat man jedoch diese Körper zur Hand, so ist auch die Möglichkeit ihrer Construction leicht einzusehen.

Achtzehntes Buch.

Anwendung der Algebra auf Geometrie.

190.

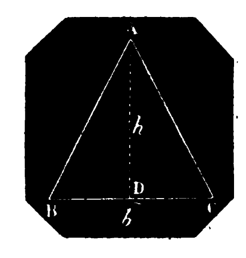
Unter Anwendung der Algebra auf Geometrie versteht man die Verbindung beider Wissenschaften mit einander, wodurch sie befähigt werden, Probleme zu lösen, welche die Kräfte jeder einzelnen übersteigen. Einige solcher Verbindungen sind im Vorhergehenden bereits schon vorgekommen; wir erinnern nur an die Aufgabe: die Inhalte räumlicher Grössen, z. B. des Kreises, Kegel, Kugel etc. zu bestimmen, welches offenbar der Geometrie allein nicht möglich ist, aber auch der Arithmetik allein nicht, weil diese die Kenntniss geometrischer Gesetze voraussetzt, worauf sie ihre Rechnungen gründet. Kurz, beide mussten mit einander verbunden werden, wie denn überhaupt fast die ganze practische Geometrie nur aus einer solchen Verbindung hervorgeht. Deshalb ist auch die Arithmetik für die Praxis so wichtig und der eigentliche Lebensnerv der practischen Geometrie, wie dies besonders ein eigener und wichtiger Theil der Mathematik, die Trigonometrie, zeigt.

Durch Hülfe der Arithmetik können ferner manche Beweise ungemein vereinfacht und abgekürzt werden. Manche geometrische Sätze lassen sich nur auf arithmetischem Wege finden und beweisen. Man merke sich hier Folgendes: Sind von einer räumlichen Grösse solche Stücke in Zahlen gegeben, wodurch andere damit in Verbindung stehende Stücke der Grösse nach vollkommen bestimmt sind und durch Zeichnung gefunden werden könnten, wie z. B. durch die drei Seiten

eines Dreiecks der Radius des um- oder eingeschriebenen Kreises etc., so muss es auch allemal zwischen solchen von einander abhängigen räumlichen Grössen eine arithmetische Beziehung geben, und somit eine allgemeine Gleichung existiren, welche den Zusammenhang dieser Grössen enthält. Und diese Gleichung aufzufinden, d. i. die geometrische Beziehung unter den fraglichen Grössen in die arithmetische Sprache zu übersetzen, ist eine der Hauptanwendungen der Arithmetik auf Geometrie. Hat man solche Gleichungen (Formeln) einmal gefunden, so zeigen sie, abgesehen von ihrer oft merkwürdigen Form, manchmal noch mehr, als man suchte, ganz ungeahnte merkwürdige Verhältnisse, so dass in diesem Sinne die Arithmetik ein wichtiges Entdeckungsmittel ist. — Einige Gewandtheit in der Algebra, schnelle Erinnerung geometrischer Lehrsätze, sind aber hiezu erforderlich, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.



191.



Aufgabe. Es ist die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks BC $= b$ gegeben, so wie die Schenkel AB $=$ AC $= a$. Man sucht die Höhe AD $= h$ und den Inhalt F.

Auflösung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC folgt sogleich:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

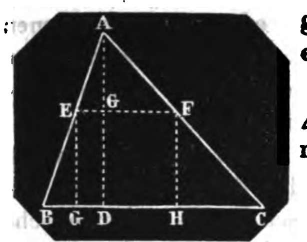
$$F = \tfrac{1}{2} b \cdot \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4} b^2}$$

Wäre $b = a$, also das Dreieck ein gleichseitiges, so wäre:

$$h = \tfrac{1}{2} a \sqrt{3}$$
$$F = \tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

192.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und Höhe eines Dreiecks gegeben BC $= a$, AD $= h$. Man sucht die Seite x eines darin



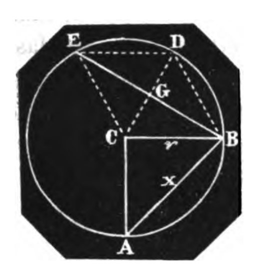
gezeichneten Quadrats, von welchem eine Seite auf der Grundlinie liegt.

Auflösung. Weil $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, und $AG = h - x$, so hat man:

$$(h - x) : h = x : a$$

$$\text{hieraus: } x = \frac{ah}{a + h}$$

193.



Aufgabe. Es ist der Radius eines Kreises $CA = r$ gegeben. Wie findet man hieraus die Seite des eingeschriebenen regelmässigen Vierecks $AB = x$, und des Dreiecks $BE = y$?

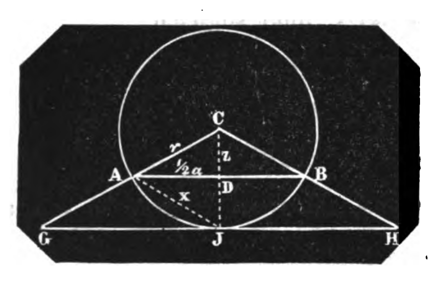
Auflösung. Für die Seite des Vierecks ist: $x^2 = 2r^2$, also:

$$x = r\sqrt{2}.$$

Ist $BD = DE = r$, so ist $CG = \frac{1}{2}r$ (§. 46), und folglich $(\frac{1}{2}y)^2 = r^2 - (\frac{1}{2}r)^2$, hieraus:

$$y = r\sqrt{3}.$$

194.



Aufgabe. Aus dem Radius eines Kreises $AC = r$, und der Seite eines beliebigen eingeschriebenen regelmässigen Vielecks $AB = a$, die Seite des umgeschriebenen regelmässigen Vielecks $GH = u$, und die Seite des eingeschriebenen regelmässigen Vielecks von doppelt so vielen Seiten $AJ = x$ zu finden.

Auflösung. Setzt man vorläufig das Perpendikel $CD = z$, so hat man zuerst $z^2 = r^2 - (\frac{1}{2}a)^2$, also: $z = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}$.

Dann ist CD : CJ = AB : GH oder $z : r = a : u$, hieraus: $u = \frac{ar}{z}$, oder: statt z seinen Werth gesetzt,

$$u = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Weil nun DJ $= r - z$, so ist: $x^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (r - z)^2$, oder: $x^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - 2rz + z^2$, oder, statt z und z^2 ihre Werthe gesetzt:

$$x = \sqrt{2r(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2})} \cdots\cdots (2)$$

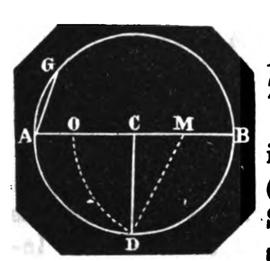
Setzt man in beiden Formeln $r = 1$, so hat man:

$$u = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$x = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2})} \cdots\cdots (4)$$

Wäre a die Seite des eingeschriebenen regelmässigen Vierecks $= \sqrt{2}$ (§. 193), so findet man nach Formel (4) die Seite x des eingeschriebenen Achtecks, und wenn man darin diesen gefundenen Werth wieder statt a setzt, nach derselben Formel die Seite des eingeschriebenen 16-Ecks etc. Auf diese mühsame Weise sind die Zahlen §. 139 berechnet worden.

195.



*) **Aufgabe.** Aus dem Radius AC $= r$ die Seite des regelmässigen Zehnecks zu berechnen.

Auflösung. Wird der Radius in O in stetiger Proportion getheilt, so ist (§. 135) OC die Seite des Zehnecks. Setzt man OC $= x$, mithin AO $= r - x$, so hat man (Algebra §. 227):

$$r - x : x = x : r$$

$$x^2 + rx = r^2$$

$$x^2 + rx + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}$$

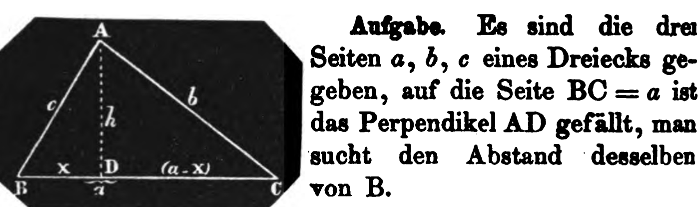
$$x + \frac{1}{2}r = \pm\sqrt{\frac{5r^2}{4}}$$

$$x = \frac{1}{2}r(-1 + \sqrt{5}).$$

Anmerkung. Hieraus folgt noch eine leichtere Construction für die Seite des Zehnecks. Man halbire nämlich den Radius BC in M, errichte CD senkrecht auf AB, nehme MO = MD, so ist CO die Seite des Zehnecks (und zugleich DO die des Fünfecks).

Beweis. Es ist $\overline{MO}^2 = \overline{MD}^2 = r^2 + \frac{1}{4}r^2 = \frac{5r^2}{4}$, also MO $= \frac{1}{2}r\sqrt{5}$, folglich CO $= \frac{1}{2}r\sqrt{5} - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r(-1 + \sqrt{5})$, wie vorhin.

196.



Aufgabe. Es sind die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks gegeben, auf die Seite BC $= a$ ist das Perpendikel AD gefällt, man sucht den Abstand desselben von B.

Auflösung. Setzt man den fraglichen Abstand BD $= x$, mithin DC $= a - x$, und AD $= h$, so ist: $h^2 = c^2 - x^2$, und auch $h^2 = b^2 - (a - x)^2$, folglich:

$$b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$$

$$b^2 - a^2 + 2ax - x^2 = c^2 - x^2$$

$$\text{und hieraus: } x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \text{ *)}$$

197.

Aufgabe. Eine Formel abzuleiten, nach welcher man aus den drei gegebenen Seiten a, b, c eines Dreiecks den Inhalt F berechnen kann.

Auflösung. Es kommt nur darauf an, die Höhe h zu finden. Setzen wir deshalb (s. Figur §. 196) in den Ausdruck

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)\,(c - x)$$

---

*) Man vergleiche, wegen des negativen Resultats, welches diese Formel geben kann, Algebra §. 126.

statt x den dafür gefundenen Werth, so ist:

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right)$$

$$h^2 = \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \frac{\{(a+c)^2 - b^2\}\ \{b^2 - (a-c)^2\}}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Multiplicirt man die gefundene Höhe mit $\frac{a}{2}$, so ist:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}\ ^{*)}$$

Diese Formel, welche besonders für die Feldmesskunst von grosser Wichtigkeit ist, lässt sich noch auf eine für die numerische Rechnung bequemere Form bringen. Setzen wir nämlich die Summe der drei gegebenen Seiten:

$$a+b+c = s = 2 \cdot \tfrac{1}{2}s$$

so ist:

$$a+b-c = 2 \cdot s\tfrac{1}{2} - 2c = 2(\tfrac{1}{2}s - c)$$
$$a+c-b = 2 \cdot \tfrac{1}{2}s - 2b = 2(\tfrac{1}{2}s - b)$$
$$b+c-a = 2(\tfrac{1}{2}s - a).$$

Dies in vorstehende Formel substituirt, kommt, nach gehöriger Reduction:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}s \cdot (\tfrac{1}{2}s - a)(\tfrac{1}{2}s - b)(\tfrac{1}{2}s - c)}$$

in Worten: man subtrahire von der halben Summe der drei Seiten jede derselben, multiplicire die drei Reste und die halbe

---

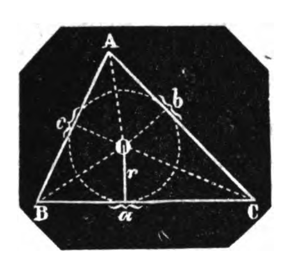
*) Diese Formel, sagt Playfair, zu Euclid's Zeiten wahrscheinlich unbekannt, findet sich, jedoch ohne Beweis, in den Schriften Hero's des Jüngern, eines Ingenieurs, welcher um das achte Jahrhundert gelebt zu haben scheint. Sie war jedoch schon viel früher in Hindostan bekannt, wie aus einem Werke des Bramegupta hervorgeht. Der Italiener Tartaglia aber, der im sechszehnten Jahrhundert lebte, machte zuerst darauf aufmerksam.



Summe mit einander, und ziehe aus dem Product die Quadratwurzeln, was mittelst Logarithmentafeln sich leicht thun lässt. Sei z. B. gegeben:

	$\frac{1}{2}s = 331,4$	$\cdots 2,5203525$
$a = 256,7$	$\frac{1}{2}s - a = 74,7$	$\cdots 1,8733206$
$b = 198,6$	$\frac{1}{2}s - b = 132,8$	$\cdots 2,1231981$
$c = 207,5$	$\frac{1}{2}s - c = 123,9$	$\cdots 2,0930713$
$s = 662,8$		$8,6099425$
	$\log. F =$	$4,3049712$
	$F =$	$20182,32 \square'$.

198.

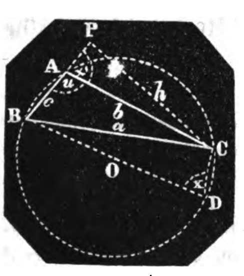


Aufgabe. Aus den drei Seiten eines Dreiecks a, b, c den Radius r des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Nach dem vorhergehenden § kann man den durch die Seiten bestimmten Inhalt F des Dreiecks als bekannt ansehen; da nun der Mittelpunct O des eingeschriebenen Kreises von allen drei Seiten gleich weit entfernt ist (§. 76), so hat man: $\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = F$, und hieraus:

$$r = \frac{2F}{a + b + c}$$

199.



Aufgabe. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Radius R des umgeschriebenen Kreises zu finden.

Auflösung. Setzt man den als bekannt anzusehenden Inhalt $= F$, und das von C auf AB gefällte Perpendikel CP $= h$ so ist erstlich:

$$\frac{ch}{2} = F, \text{ also: } h = \frac{2F}{c}$$

Verbindet man den Endpunct D des Durchmessers mit C, so ist $\widehat{BCD} = P = 90^\circ$ (§. 81), ferner: $x + u = x' + u = 180^\circ$ (§. 90), also $x = x'$, mithin $\triangle CAP \sim \triangle BDC$, daher: $b : 2R = h : a$, oder $b : 2R = \frac{2F}{c} : a$, und hieraus:

$$R = \frac{abc}{4F}.$$

200.

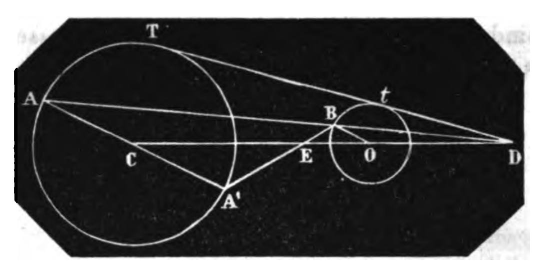
Aufgabe. Es soll ein Quadrat, dessen Seite $= a$, mit gleichen Kreisen möglichst ausgefüllt werden. Mit wie viel Kreisen kann dies geschehen und wie viel beträgt die Flächensumme der leer bleibenden Zwisohenräume?

Auflösung. Denkt man sich die Seiten des Quadrats in n gleiche Theile getheilt, so zerfällt das Quadrat in n^2 kleinere gleiche Quadrate. In jedes kann ein Kreis beschrieben werden, dessen Inhalt $= \left(\frac{a}{2n}\right)^2 \pi$. Der Inhalt aller Kreise ist $= n^2 . \left(\frac{a}{2n}\right)^2 \pi = \frac{a^2}{4} \pi$; folglich ist, wie gross auch n angenommen werden möge, die Summe aller Kreisflächen doch jedesmal gerade so gross, als ein einziger eingeschriebener Kreis; die fragliche Summe der leeren Zwischenräume ist folglich $= a^2 - \frac{a^2}{4} \pi = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$, und das Quadrat kann mit 1, 4, 9, 16, 25 ··· gleichen Kreisen ausgefüllt werden.

Eben so ist leicht einzusehen, dass ein Cubus, dessen Seite $= a$, mit 1, 8, 27, 64 ··· n^3 gleichen Kugeln ausgefüllt werden kann und dass die Summe der leeren Zwischenräume stets $= a^3 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$.

201.

Aufgabe. Es sind die Grössen zweier Kreise und ihr Abstand gegeben: $CA = R$, $OB = r$, $CO = e$. Man ziehe zwei parallele Radien, sowohl nach derselben, als auch nach entgegengesetzten Richtungen $OB \parallel CA$ und $OB \parallel CA'$, verbinde ihre Endpuncte durch grade Linien und bestimme dann deren Durchschnittspuncte D und E in der Centrallinie von O, nämlich $OD = x$, und $OE = y$.



Auflösung. Weil $\triangle BOD \sim \triangle ACD$, so hat man:

$$x : x + e = r : R, \text{ hieraus:}$$

$$x = \frac{re}{R - r}$$

Ferner ist $\triangle OEB \sim \triangle ECA'$, daher:

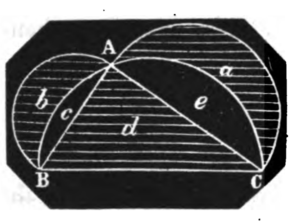
$$y : e - y = r : R, \text{ hieraus:}$$

$$y = \frac{re}{R + r}$$

Anmerkung. Weil die gefundenen Werthe x, y von der Lage der parallelen Radien nicht abhängen, und dieselben bleiben, wenn die Verbindungslinie auf dem einen Radius, mithin auch auf dem andern senkrecht steht, so ist es leicht, an zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Berührungslinie zu ziehen, indem man erst die Puncte D und E bestimmt und dann nach §. 83 verfährt. Denkt man sich statt der Kreise Kugeln, und die kleinere von der grössern beleuchtet, so ist die Länge des sogenannten Kernschattens durch den für x gefundenen Ausdruck gegeben.



202.



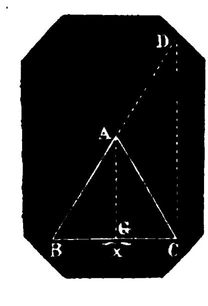
Aufgabe. Ueber die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, ABC, sind Halbkreise beschrieben; man soll beweisen, dass die Flächensumme der beiden mondförmigen Stücke a und b, welche nach ihrem Entdecker die Hippokratischen Möndchen genannt werden, so gross ist, als die Fläche des Dreiecks ABC.

Auflösung. Die Fläche des grössern Halbkreises ist $= \frac{1}{8}\overline{BC}^2 \cdot \pi$, die der beiden kleinern $= \frac{1}{8}\overline{AB}^2\pi + \frac{1}{8}\overline{AC}^2\pi = \frac{1}{8}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)\pi = \frac{1}{8} \cdot \overline{BC}^2 \cdot \pi$, folglich ist

$$c + d + e = a + e + b + c,$$

hieraus: $a+b=d$. Wäre das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig, so wäre jedes der beiden Möndchen gleich der Hälfte des Dreiecks ABC.

203.



Aufgabe. Wie gross muss die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sein, wenn der Inhalt desselben F = 48□′, und die gleichen Schenkel AB = AC = a = 10′ sein sollen.

Auflösung. Es sei die gesuchte Grundlinie BC=x, also das darauf gefällte Perpendikel AG= $\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}x)^2}$, so hat man:

$$F=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-\frac{1}{4}x^2}$$

$$F^2=\frac{x^2}{4}\left(a^2-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{a^2x^2}{4}-\frac{x^4}{16}$$

$$x^4-4a^2x^2=-16F^2 \text{ (Algebra §. 231)}$$

$$x^4-4a^2x^2+(2a^2)^2=4a^4-16F^2$$

$$x^2-2a^2=\pm\sqrt{4a^4-16F^2}$$

$$x=\sqrt{2a^2\pm\sqrt{4a^4-16F^2}}$$

Je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen nimmt, hat man $x=16$, und auch $x=12$. Dass hier wirklich zwei verschiedene Grundlinien möglich sind, worauf die Algebra aufmerksam macht, ist leicht einzusehen, wenn man AB um sich selbst nach D verlängert, und DC zieht; dann ist △ABC = △ADC (§. 97, Zusatz). Ist also BC = 12, so ist DC = 16.

204.

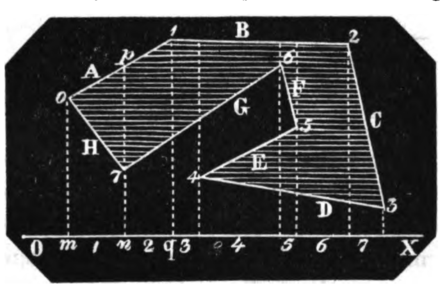
*) Zum Schlusse dieses Capitels wollen wir noch eine uns von Gauss mitgetheilte, für die practische Geometrie wichtige Methode erläutern, nach welcher man den Flächeninhalt einer aufs Papier getragenen Figur (z. B. einer Charte) leichter, als nach der gewöhnlichen Methode berechnen kann.

Nach der gewöhnlichen Methode zerlegt man die Figur in lauter Dreiecke (in Rechtecke ist selten möglich), misst nach demselben verjüngten Maassstab, nach welchem die Figur

aufgetragen worden, in jedem Dreieck Grundlinie und Höhe, und berechnet hieraus den fraglichen Inhalt. Diese Methode ist aber nicht allein der Charte sehr nachtheilig, sondern auch noch andern Uebelständen und Unbequemlichkeiten ausgesetzt, denen wir auf folgende Weise ausweichen können.

Des leichtern Verständnisses halber wollen wir als Beispiel zuerst eine gradlinigt begrenzte Figur von bestimmter Seitenzahl annehmen.

Wir ziehen nun neben dieser Figur in beliebiger Richtung eine Linie, OX (Abscissenachse), und fällen darauf von jedem Eckpunct ein Perpendikel (Ordinate), welches wir uns aufwärts durch die Figur hindurch verlängert denken, so ist dadurch die Abscissenlinie in $n-1$ Theile getheilt,*) wenn die Figur n Seiten hat, und es ist klar, dass jeder dieser Theile der Abscissenlinie mit zwei Ordinaten und einer Seite der Figur oder mit einem Stück von der Seite, ein Trapez bildet, kurz, die ganze Figur (bis an die Abscissenachse gerechnet) ist in lauter Trapeze zerlegt, die theils positiv, theils negativ sind. —



Bezeichnen wir die ganzen Seiten der Figur einfach mit A, B, C···, und Stücke davon mit denselben, jedoch numerirten Buchstaben, so können wir den Flächeninhalt der Figur folgendermaassen erst kurz andeuten:

$$\begin{array}{llllll}
1A_1 - 1H & - 2G_1 & + 3B_1 & + 4E_1 & - 4D_1 & - 5F + 7C \\
2A_2 & - 3G_2 & + 4B_2 & + 5E_2 & - 5D_2 & \\
 & - 4G_3 & + 5B_3 & & - 6D_3 & \\
 & & + 6B_4 & & - 7D_4 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{Fläche} = (A) + (B) + (C) + (-D) + (E) + (-F) + (-G) + (-H).$$

---

*) Eins oder mehrere dieser Theile kann = 0 sein, wenn eine oder mehrere Seiten der Figur mit der Ordinatenrichtung parallel laufen.

wobei also $1 A_1$ das Trapez $opnm$ und $1 H$ das davon zu subtrahirende Trapez $o7nm$, ferner $2 A_2$ das Trapez $p1qn$, und $(A) = 1 A_1 + 2 A_2$ das Trapez $o1qm$ bedeutet etc.

Man sieht also, dass die algebraische Summe der Trapeze, welche die Seiten mit den aus ihren Endpuncten gefällten Ordinaten und den dazwischen liegenden Stücken der Abscissenlinie bilden, den Flächeninhalt der Figur auf sehr einfache Weise darstellt. Was die Vorzeichen betrifft, unter denen offenbar ein enger Zusammenhang Statt findet, so lassen sich dieselben auf folgende Weise erklären:

Wir können den Umfang einer Figur auf zweierlei Weise umgehen; einmal, indem wir die Figur selbst immer zur Rechten, dann auch, indem wir sie immer zur Linken haben. Geht man vom Endpunct einer der beiden äussersten Ordinaten, z. B. von o aus, und zwar steigend von o nach 1, von 1 nach 2 etc., so unterscheiden sich die Seiten ganz einfach durch + und —, je nachdem sie vorwärts oder rückwärts laufen, d. h. je nachdem sie von der ersten Ordinate weiter ab zu den folgenden oder wieder zurückführen. Hiernach müssen also nothwendig A, B, C positiv, D aber negativ, E wieder positiv sein etc.

Bezeichnet man demnach die Eckpuncte der Figur, von einer der äussersten Ordinaten ausgehend, mit o, 1, 2 $\cdots$, die von einem beliebig genommenen Punct, O, abgemessenen Abscissen derselben mit x_0, x_1, $x_2 \cdots$, und die zugehörigen Ordinaten mit y_0, y_1, $y_2 \cdots$ (wobei also $x_0 = Om$, $x_1 = Oq \cdots$; $y_0 = om$, $y_1 = 1q \cdots$; $x_1 - x_0 = mq$; $\frac{y_0 + y_1}{2} = \frac{om + 1q}{2}$ etc.), so kann man die vorhergehende Formel, wenn man die Trapeze (A), (B) $\cdots$ durch Coordinaten ausdrückt, auch so schreiben:

$$F = (x_1 - x_0) \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + (x_2 - x_1) \frac{y_1 + y_2}{2} + (x_3 - x_2) \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots (1)$$

Wir können auf diese Weise allen Trapezen der Gleichförmigkeit halber das *plus* Zeichen geben, denn ist eins derselben negativ, so ist die dazu gehörige Seite rückläufig, mithin auch die Abscisse des vorhergehenden Punctes grösser, als die des folgenden, und deshalb liegt das Negative schon in dem Factor, welcher die Höhe des Trapezes ausdrückt; so ist z. B. in $(-D) = (x_4 - x_3) \frac{y_3 + y_4}{2}$ der Factor $x_4 - x_3$ wirklich negativ.

Aus obiger Formel folgt:

$$F=\frac{1}{2}\begin{cases}(x_1-x_0)\,(y_0+y_1)\\(x_2-x_1)\,(y_1+y_2)\\(x_3-x_2)\,(y_2+y_3)\\(x_4-x_3)\,(y_3+y_4)\\(x_5-x_4)\,(y_4+y_5)\\(x_6-x_5)\,(y_5+y_6)\\(x_7-x_6)\,(y_6+y_7)\\(x_0-x_7)\,(y_7+y_0)\end{cases}$$

Ohne die angedeuteten Multiplicationen wirklich auszuführen, sieht man leicht, dass je zwei auf einander folgende Producte, nämlich das erste und zweite, das zweite und dritte, das letzte und erste, immer zwei gleiche und entgegengesetzte Theile enthalten, z. B. das erste $+ x_1 y_1$, das zweite $- x_1 y_1$ etc., lässt man diese aus, so ist:

$$F=\tfrac{1}{2}[x_0(y_7-y_1)+x_1(y_0-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+\cdots$$
$$+x_6(y_5-y_7)+x_7(y_6-y_0)].$$

Diese höchst einfache schöne Formel*) (in welcher man auch die Coordinaten x, y mit einander verwechseln könnte) würde in Worten lauten: Man multiplicire jede Abscisse mit der Differenz der nächst vorhergehenden und nächstfolgenden Ordinate und nehme von der algebraischen Summe dieser Producte die Hälfte.

Es ist klar, dass diese Formel allgemein gilt, die Anzahl der Puncte möge noch so gross sein. Hat die Figur auch krummlinigte Grenzen, so findet man das Resultat desto genauer, je mehr Puncte man annimmt. Findet man es bequemer, die Abscissenlinie durch die Figur gehen zu lassen, so kann dies die Gestalt der Formel nicht ändern, weil diese Verlegung der Abscissenlinie erstlich die Abscissen-Differenzen $(x_1-x_0)\cdots$, selbst nicht ändert, und was die Ordinaten $y_0, y_1\cdots$ betrifft, so ist, wenn auch jede um $\mp a$ geändert wird, doch immer $(y_m \mp a) - (y_p \mp a) = y_m - y_p$.

Was das bequeme Messen der Coordinaten betrifft, so braucht man dazu zwei rechtwinklig verbundene Maassstäbe, wovon der eine, an der Abscissenlinie fortgleitende Schenkel die Abscissen, und der andere zugleich die Ordinaten abliest.

---

*) Nach einer brieflichen Mittheilung hat Gauss diese Formel schon 1790 gefunden. Sie wird seitdem oftmals wieder auf's Neue gefunden, d. h. von verschiedenen Schriftstellern ohne Angabe der Quelle mitgetheilt.

Anhang.

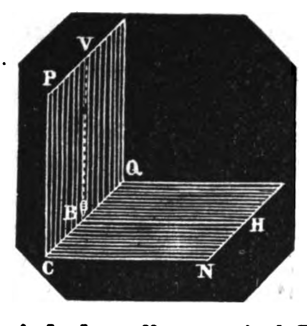
Practische Geometrie.

205.

Obwohl man eigentlich jede Anwendung der Geometrie auf wirklich vorkommende Fälle des practischen Lebens practische Geometrie nennen kann, so pflegt doch gemeiniglich nur derjenige Theil der angewandten Mathematik so genannt zu werden, welcher sich hauptsächlich mit der Feldmesskunst beschäftigt, und da in dieser das Nivelliren eine der wichtigsten Operationen ist, so müssen wir hiervon, so wie von den dazu erforderlichen Instrumenten, noch eine Vorstellung zu geben versuchen, weil die hiebei vorkommenden neuen Begriffe beim Uebergang zum Studium der Mechanik und Naturwissenschaften als bekannt vorausgesetzt werden müssen.

206.

Erklärungen. 1. Diejenige Richtung im Raume, welche ein ganz frei und ruhig hängendes Loth, VB (Senkblei, ein Faden, dessen unteres Ende mit einer kleinen Kugel beschwert ist), angiebt, heisst vertical (von *vertex*, Scheitel, weil diese Linie, aufwärts verlängert, durch den höchsten Punct am Himmelsgewölbe, den Scheitelpunct, geht).



2. Jede längs durch eine Verticallinie gelegte Ebene, wie PQ, heisst eine Verticalebene.

3. Jede Linie, die auf einer Verticallinie rechtwinklig steht, wie BH, heisst eine Horizontallinie.

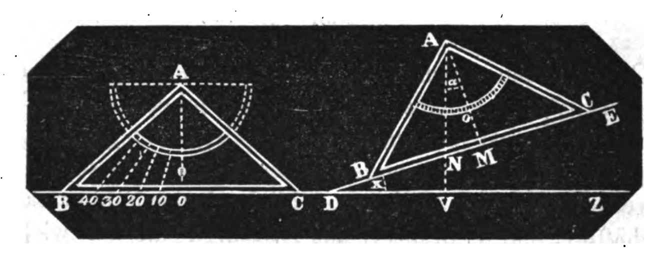
4. Jede Ebene, welche, wie QN, auf einer Verticallinie senkrecht steht, heisst Horizontalebene.

Die Wände eines Zimmers z. B. sind oder sollten vertical, Fussboden und Decke horizontal sein.

Ein sehr einfaches Instrument, mittelst dessen man unter suchen kann, ob eine Linie oder Ebene genau vertical ist, giebt uns das oben erwähnte Loth (Senkblei), welches man an der Linie oder Ebene herunter hängen lässt, und beob achtet, ob die Linie oder Ebene dieselbe Richtung hat.



207.



Erklärung. Ein gleichschenkliges Dreieck von Metall (Holz), in dessen Spitze A ein Loth frei hängt, nennt man eine Setzwage. Befindet sich zwischen dessen Schenkeln ein aus der Spitze A beschriebener, in Grade getheilter Kreisbogen,*) so dient dies Instrument nicht allein, um zu untersuchen, ob Linien oder Ebenen eine horizontale Lage haben, oder um sie in eine solche zu bringen, sondern auch, um ihre Neigung gegen den Horizont zu bestimmen.

Stellt man nun diese Setz- oder Bergwage auf eine Linie, BZ, und das Loth spielt gerade auf den Nullpunct ein, so ist,

---

*) Oft sind die Theilungen auf der Grundlinie BC bezeichnet, wodurch der Gradbogen entbehrlich wird.

weil AB = AC, der Winkel BAC halbirt, das Loth folglich senkrecht auf BC, mithin die Linie BZ horizontal.

Wäre die Setzwage unrichtig (und nie muss man sich auf die Richtigkeit eines Instruments verlassen, sondern dessen Fehler zu eliminiren wissen), wäre z. B. der linke Schenkel AB kürzer als AC, so wird, auf einer horizontalen Linie, das Loth vom Nullpunct nach dem kürzern Schenkel hin, um einen gewissen Winkel, y, (den Fehler des Instruments) abweichen. Dreht man dann aber das Instrument um, so dass B nach C und C nach B kommt, so muss das Loth jetzt wieder um denselben Winkel y nach dem kürzern (jetzt rechten) Schenkel hin abweichen; daher die allgemeine Regel: man drehe die Setzwage jedesmal um, spielt dann das Loth beidemal auf 0 ein, oder weicht es nach entgegengesetzten Seiten gleich viel von 0 ab, so ist die Linie horizontal.

Eben so untersucht man, ob eine Ebene horizontal ist, indem man die Setzwage nach zwei sich kreuzenden Richtungen aufstellt (§. 149).

Stellt man die Setzwage auf eine um den Winkel x gegen den Horizont geneigte Linie, DE (Figur 2), und das Loth weicht beidemal (vor und nach der Umdrehung) gleichweit, z. B. um $a = 30°$ vom Nullpunct ab, so ist offenbar der fragliche Winkel $x = a$, weil das Loth von selbst vertical hängt, mithin die rechtwinkligen Dreiecke AMN und DVN gleichwinklig sind.

Ist das Instrument unrichtig, so fällt das Loth beidemal, nämlich vor und nach der Umdrehung, um einen Winkel, y, zu weit nach dem kürzern Schenkel hin. Giebt nun die erste Ablesung $a°$, die zweite $b°$; so hat man, wenn $b < a$, das erstemal offenbar $x + y$, das zweitemal $x - y$ abgelesen, daher:

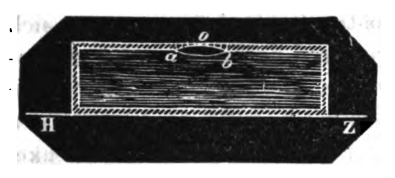
$$x + y = a$$
$$x - y = b$$

hieraus: $$x = \frac{a + b}{2}$$

d. h. man nimmt von der Summe beider Ablesungen die Hälfte.

Die Neigung einer Ebene gegen den Horizont (die Abdachung oder Böschung eines Berges z. B.) wird eben so bestimmt, nur muss man in der fraglichen Ebene natürlich erst eine Horizontallinie mit Hülfe der Setzwage bestimmen, auf dieser dann eine Senkrechte annehmen, und auf diese die Setzwage stellen.

208.



Niveau (Libelle) ist eine genaue cylindrische Röhre von Glas, die jedoch an einer Stelle, *aob* (Mitte), von innen genau ausgeschliffen sein muss, so dass die Bögen *oa*, *ob* der Aushöhlung vollkommen gleich, auch beide vom Mittelpunct *o* aus durch Theilstriche gleichmässig getheilt sind. Diese Röhre ist bis auf den kleinen Raum der Aushöhlung *aob* mit Weingeist gefüllt und hermetisch verschlossen. Zum Schutz der Röhre, und damit man sie besser handhaben kann, ist sie mit einem Gehäuse von Messing so umgeben, dass etwas mehr, als die innere Aushöhlung *aob* sichtbar bleibt. Die untere Platte des Gehäuses ist mit der Achse der Röhre parallel, oder doch durch eine Stellschraube leicht in solche Lage zu bringen. Dieses kleine Instrument (Niveau, sprich: Niwoh) ist weit bequemer und besser, als die Setzwage, wenn es bloss darauf ankommt, zu untersuchen, ob Linien, oder Ebenen horizontal sind.

Es ist nämlich leicht einzusehen, dass, wenn das Niveau auf einer horizontalen Linie steht, der kleine leer gebliebene und nur mit Luft erfüllte Raum, die sogenannte Luftblase — weil stets die höchste Stelle einnehmend — sich so stellen wird, dass sowohl vor, als nach der nöthigen Umwendung, beide Enden der Blase um gleich viel Striche vom Nullpunct abstehen.

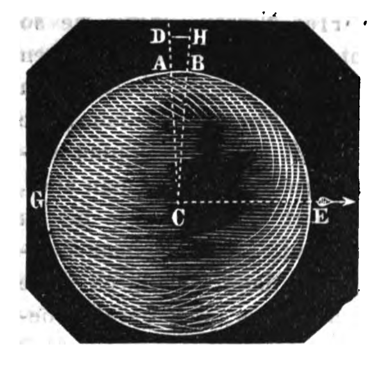
Das Niveau möge übrigens richtig (justirt) sein oder nicht, es wird gerade so damit beobachtet, wie mit der Setzwage.

209.

Für die meisten Zwecke der practischen Geometrie ist es erlaubt, die Erde als eine vollkommene Kugel*) anzunehmen,

---

*) Streng genommen ist, selbst nachdem man von den Erhöhungen und Vertiefungen (Berg und Thal), als gegen die Grösse der Erde verschwindend, abstrahirt hat, die Erde dennoch keine Kugel, sondern von ganz unregelmässiger, noch wenig bekannter Form.



und dass die an irgend einem Orte, A, durch das Loth bestimmte Verticallinie DA verlängert durch den Mittelpunct C geht, weil die eine Hälfte der Erde das Loth eben so stark anzieht, als die andere Hälfte. Jeder andere Ort, B, E.., hat also eine andere Verticallinie. Verticallinien sind also nicht parallel. Für sehr nahe gelegene Oerter jedoch kann man, wie folgende Betrachtung zeigt, Stücke von ihren Verticallinien in vielen Fällen der Praxis unbedenklich als parallel annehmen. — Sind z. B. DA, HB die Verticallinien für zwei nur um eine halbe Meile von einander entfernte Oerter, A, B, und ABEG ein grösster Kreis, dessen Umfang = 5400 Meilen, so wäre der Winkel ACB, welchen die, erst in der grossen Entfernung von 860 Meilen (859,4), zusammenstossenden Verticalen DA, HB mit einander machen, nur 2 Minuten, also am Scheitel C nicht mehr wahrnehmbar, und deshalb auch die in zwei nahen Puncten A, D errichteten Perpendikel (Horizontalen) AB und DH für unsere Sinne gleich lang, also auch DA parallel mit HB.

Aus denselben Gründen ist nun ferner auch die Länge des Bogens $\widehat{AB} = \overline{AB}$, mithin der Bogen selbst als grade Linie zu betrachten. In vielen Fällen (z. B. in der Schifffahrts- und Feldmesskunst) kann man sogar Bögen von 3 bis 5 Meilen Länge und darüber, als grade Linien, mithin auch Flächen von 3 bis 5 Meilen Ausdehnung unbedenklich als eben annehmen.

Was von der Oberfläche der Erde als fester Körper gilt, muss offenbar auch von der Oberfläche eines ruhigen flüssigen Körpers darauf gelten, die also in grosser Ausdehnung genommen, wie die Erde krumm ist, in kleiner Ausdehnung aber als eben betrachtet werden kann, z. B. die Oberfläche eines kleinen ruhigen Sees.

210.

Nivelliren. Die Oberfläche einer ruhigen Flüssigkeit nennt man Niveau, und man sagt von zwei oder mehreren Puncten

auf der Erde, sie seien in einerlei Niveau, wenn sie so liegen, dass die (erweitert gedachte) Oberfläche einer ruhigen Flüssigkeit, welche durch den einen Punct geht, auch durch die übrigen Puncte geht. Sämmtliche Puncte sind dann, die Erde als Kugel betrachtet, gleichweit vom Mittelpunct entfernt und liegen also in einer krummen Fläche, die man aber, wenn die Puncte nur einige hundert Schritte oder bis zu einer Meile von einander entfernt sind, als eine ebene horizontale Fläche annehmen kann, weil dann alle durch diese Puncte gedachten Verticallinien als unter sich parallel betrachtet werden können.

Das Verfahren, Puncte auf der Oberfläche der Erde zu bestimmen, welche in einerlei Niveau liegen, oder auch den Unterschied ihres Niveau's zu finden, d. h. um wie viel der eine höher oder tiefer liegt, als der andere, nennt man nivelliren. Nivellements (sprich: Niwellemangs) sind sehr häufig erforderlich, z. B. bei Anlegung von Kunststrassen, Eisenbahnen, Deichen, Wasserbauten, Wasserleitungen, Canälen etc. Das hiezu nöthige Instrument, so wie das Verfahren selbst, werden die folgenden Paragraphen erläutern.

211.

Nivellir-Instrumente giebt es sehr verschiedene. Die bessern bestehen aus einem, auf einem dreibeinigen Stativ ruhenden Fernrohr, welches sich um eine verticale Achse ganz herum drehen und mittelst eines daran befindlichen Niveau's sich so stellen lässt, dass die Achse des Fernrohrs (Visirlinie, Collimationslinie) genau horizontal ist (siehe folgende Figur). In der Bildebene des Fernrohrs, nämlich die Stelle nahe am Okularglase, wo das Bild von einem gesehenen Gegenstand entsteht, ist ein feiner Faden (Visirfaden) horizontal und senkrecht gegen die Visirlinie ausgespannt, oder statt eines Fadens auch wohl zwei Fäden (Fadenkreuz), von welchen der eine horizontal, der andere vertical ist.*) Zu einem solchen Nivellir-Instrument gehören nun noch zwei Zielstangen, welche in Fuss,

*) Die wirkliche Ansicht und Handhabung des Instruments wird dem Practiker das Uebrige lehren.

Zoll und Linien eingetheilt sind, und an welchen sich, mittelst einer Schnur, eine kleine Visirtafel mit einem scharf markirten Zielpunct auf und nieder schieben lässt.

212.

Nivelliren aus der Mitte. Um den Höhenunterschied zweier Puncte auf der Erde, 0 und 1, zu finden, stellt der Beobachter sein Nivellirinstrument zwischen den beiden Puncten 0 und 1 in der Mitte A auf (siehe folgende Figur); seine beiden Gehülfen in 0 und 1 halten jeder ihre Nivellirstange mit Hülfe des Senkbleis in verticaler Lage. Der Beobachter stellt nun mit Hülfe des (der) Niveau's die Achse des Fernrohrs horizontal, richtet es auf die in 0 errichtete Nivellirstange, winkt dem Gehülfen, die Visirtafel zu heben oder zu senken, bis der markirte Zielpunct in der horizontalen Visirlinie, und folglich an dem horizontalen Visirfaden erscheint, alsdann wird die Zielhöhe $0h$ abgelesen. Es sei z. B. $0h = 2'8''4'''$. Hierauf wird nun, indem man das Fernrohr um seine verticale Achse dreht, eben so nach der vom zweiten Gehülfen in 1 errichteten Nivellirstange visirt. Es sei die hier abgelesene Zielhöhe $1h = 6'9''6'''$, alsdann ist der Höhenunterschied beider Puncte $= 1h - 0h = 4'1''2'''$, um so viel liegt nämlich der Punct 1 unter dem durch 0 gedachten Horizont, oder der Ort (1) hat $4'1''2'''$ Fall (Gefäll) in Bezug auf den Ort (0), oder letzterer Ort (0) hat in Bezug auf erstern $4'1''2'''$ Steigung.

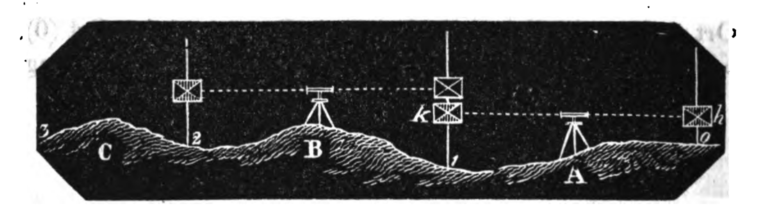
213.

Ist das Nivellirinstrument in gleicher Entfernung von den beiden Oertern 0 und 1 aufgestellt, und wäre dann auch die Visirlinie, wegen eines Fehlers des Instruments, nicht genau horizontal, und träfe sie den Zielpunct in 0 z. B. um $5'''$ zu hoch, so würde, wegen der gleichen Entfernung beider Oerter vom Instrument, derselbe Fehler auch auf der andern Seite Statt finden, nämlich die Zielhöhe in 1 auch um $5'''$ zu hoch ausfallen. Durch Subtraction beider Zielhöhen wird aber dieser Fehler des Instruments eliminirt, also unschädlich. Dies ist der

Grund, weshalb man das Instrument in gleicher Entfernung von den beiden nivellirten Oertern aufstellt, auch werden hiedurch zugleich noch die Fehler eliminirt, welche bei sehr grossen Entfernungen die Refraction und Krümmung der Erde verursachen könnten. Es genügt indessen, diese gleiche Entfernung des Standpuncts nur näherungsweise durch blosses Abschreiten zu bestimmen. Eben so wenig ist es nöthig, dass der Standpunct des Instruments mit den beiden nivellirten Oertern in einerlei Richtung liegt, verschiedene Umstände können nöthigen, ihn bedeutend zur Seite annehmen zu müssen. Um jedoch auch noch kleine Beobachtungsfehler möglichst unschädlich zu machen, muss man aus demselben Standpuncte noch einmal nivelliren, indem man zuvor das Instrument, durch näheres Zusammenrücken oder weiteres Ausspreizen der drei Beine, höher oder tiefer stellt, und dann von beiden gefundenen Höhenunterschieden, die jedoch bei kurzen Distanzen nicht über $\frac{1}{10}$ Zoll differiren dürfen das Mittel nehmen.

214.

Liegen die beiden Oerter 0 und 3, deren Höhenunterschied bestimmt werden soll, sehr weit aus einander, so werden Zwischenstationen nothwendig. Der Beobachter schreitet dann eine



passende, sonst beliebige Länge (100, 200, 300 Schritte etc.)*) von 0 nach A, und eben so weit von A nach 1, dann eine passende Länge von 1 nach B, und eben so weit von B nach 2

*) Wie weit man die Distanzen nehmen soll, hängt von der Terrainbeschaffenheit, von der Länge der Nivellirstangen, dann auch von der Tragkraft des Fernrohrs ab, indem, wenn möglich, der Beobachter durch Hülfe des Fernrohrs die Zielhöhen selber abliest.

ab etc.*) und beobachtet zugleich auf die vorhin gezeigte Weise vom Standpunct A aus den Höhenunterschied der Puncte 0 und 1; von B aus den Höhenunterschied der Puncte 1 und 2 u. s. w. bis zu Ende, indem er die beobachteten Zielhöhen etwa folgendermaassen aufzeichnet:

Standpunct zwischen	Entfernung der Zielpuncte in Schritten.	Zielhöhen rückwärts.	Zielhöhen vorwärts.	Fall.	Steigung.	Bemerkungen.
0 und 1	350	2′ 8″4‴	8′9″6‴	6′1″2‴		
1 » 2	400	6′ 6″8‴	4′8″7‴	......	1′10″1‴	
2 » 3	300	5′10″8‴	5′9″1‴	......	0.1.7	
	1050	15′1″8‴	19′3″2‴	6′1″2‴	1.11.8	

Aus dieser Tabelle folgt, dass in Bezug auf den Ort 0, der Ort 1 um 6′1″2‴ tiefer liegt; der Ort 2 aber, weil er wieder 1′10″1‴ höher als der Ort 1 liegt, nur um 4′3″1‴ tiefer als 0, und weil 3 wieder 0′1″7‴ höher als 2 liegt, dieser Ort 3 in Bezug auf 0 ein Gefäll von 4′1″6‴ hat. Hieraus ergiebt sich nun leicht die allgemeine Regel, dass, um den Höhenunterschied des Anfangs- und Endpuncts (oder auch irgend zweier Puncte des ganzen Zuges zu finden, man nur die Summe aller Gefälle bis zum Endpunct, so wie auch die Summe aller Steigungen zu suchen braucht, dann die kleinere Summe von der grössern abzieht, und dem Rest die Benennung der grössern Summe giebt. So ist z. B. der Höhenunterschied zwischen 0 und 3 = 6′1″2‴ − 1′11″8‴ = 4′1″6‴ Fall; der zwischen 1 und 3 = 1′11″8‴ − 0′0″0‴ = 1′11″8‴ Steigung etc. Zur Controle der Rechnung kann man die Summe aller Zielhöhen vorwärts und rückwärts zwischen irgend zwei Puncten von einander subtrahiren, was dasselbe Resultat geben muss.

*) Die Oerter 0, 1, 2 ... pflegt man zuweilen mit numerirten, in die Erde getriebenen Pfählen zu bezeichnen, besonders dann, wenn behufs Anlegung eines Deiches, einer Eisenbahn etc. die nivellirte Strecke planirt, d. h. alle Orter durch nöthige Erhöhungen und Abgrabungen in gleiche Höhe (Niveau) kommen sollen.

Zur grössern Sicherheit muss man dieselbe Strecke noch einmal vom Endpunct nach dem Anfangspunct wieder zurück nivelliren. Ob übrigens der ganze Zug der nivellirten Puncte in einerlei Richtung liegt, oder sich beliebig schlängelt, das ist gleichgültig.

215.

Nivelliren aus den Endpuncten. Kann man wegen eines zwischen liegenden Hindernisses (eines Flusses z. B.) das Instrument weder in der Mitte, noch zur Seite zweier Puncte, 0 und 1, aufstellen, so muss man, um einen etwaigen Fehler des Instruments zu eliminiren, zeitraubende und dennoch missliche Reductionen wegen Refraction und Krümmung der Erde zu vermeiden, aus beiden Endpuncten 0 und 1 nivelliren. Man stellt dann das Instrument zuerst in dem einen Punct (0) auf, visirt nach dem andern (1), liest die Zielhöhe ab, z. B. 6′ 9″ 4‴, misst zugleich auch die Höhe des Instruments, z. B. 4′ 5″ 1‴, so hat man das Gefäll von (1), = 2′ 4″ 3‴. Der Vorsicht halber stelle man jetzt das Instrument höher oder tiefer und visire noch einmal nach (1), um zu sehen, ob auch dasselbe Resultat 2′ 4″ 3‴ kommt. Hierauf wird nun das Instrument nach dem andern Ort (1) gebracht, und von hier aus ebenso zweimal nach (0) visirt, jetzt aber die Zielhöhe von der Instrumentshöhe subtrahirt, wo man dann dasselbe Resultat wie vorhin erhalten, oder wenn beide nur wenig differiren, das Mittel nehmen muss.

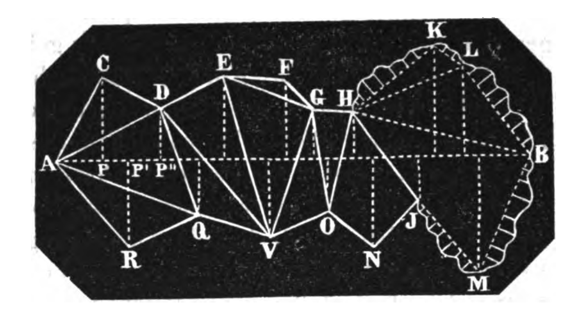
216.

Erklärung. Unter Charte (Plan) von einem Lande versteht man eine kleinere Figur (Zeichnung), in welcher alle Puncte dieselbe Lage gegen einander haben, oder doch andeuten, wie die, wovon sie Bilder sein sollen. Solche Charten werden nach dem Zwecke, dem sie entsprechen sollen, und wonach sich ihre technische Anfertigung richtet, verschieden benannt. So giebt es z. B. petrographische Charten, welche die Gebirgsarten eines Landes, ihre Auflagerungen etc. kennen lehren. Ihre Entwerfung setzt geognostische Kenntnisse, sowie die übliche Zeichensprache voraus. Hierüber giebt es eigene Werke, so wie auch über die sogenannte Markscheidekunst,

welche zur Leitung des Bergbaues unter der Erde messen und nivelliren lehrt. Militär-Charten (Situationspläne) sollen von einer Gegend (Terrain) eine deutliche Vorstellung geben, namentlich alle Berge, deren Höhe, Abhänge, Schluchten, den Lauf der Flüsse, Hecken, Hindernisse (Coupirungen) und andere wichtige Puncte darstellen. Diese Charten sind für die Kriegsführung wichtig, um darnach die günstigen Positionen eines Heeres und die zu machenden Operationen etc. im Voraus bestimmen zu können. Ueber die technische Anfertigung solcher Charten handeln besondere Werke. Geographische Charten (Land- und See-Charten) stellen ganze Reiche und selbst die ganze Oberfläche der Erde dar, namentlich die Lage und Grenzen der Länder und Provinzen, der Meere, den Lauf der Flüsse etc. Unter diesen Charten giebt es sehr wenige, welche den Anforderungen der Mathematik nur einigermaassen entsprächen, indem viele Länder, z. B. Afrika, noch gar nicht aufgeschlossen, viel weniger vermessen sind, was erst mit der Zeit und nur nach und nach geschehen kann. Oekonomische Charten (Cameral- oder Cataster-Charten). Solche Charten lässt der Staat zur Bestimmung eines Catasters (Steuerbuch, Ackerverzeichniss) anfertigen, um nach der Grösse der Ländereien und ihres Ertrags die Steuern zu reguliren.

Bevor nun aber eine geographische oder ökonomische Charte von einer Gegend entworfen werden kann, muss dieselbe erst aufgenommen (vermessen) werden, und dieser Aufnahme muss dann, wenn die Gegend von grosser Ausdehnung ist, immer erst eine sogenannte Triangulation vorausgehen, d. h. das ganze Land wird erst, um feste Anhaltspuncte zu erhalten, mit einem Netz von Dreiecken überspannt, und die Lage ihrer Eckpuncte durch scharfe Winkelmessungen, trigonometrische Rechnungen und Wahrscheinlichkeitsrechnung genau bestimmt. Ist aber die aufzunehmende Gegend nur von geringer Ausdehnung, etwa von einem Punct aus übersehbar, und nur eine ökonomische Charte davon zu entwerfen, so ist eine vorhergehende Triangulation nicht nothwendig. Die Aufnahme kann dann gleich mittelst des Messtisches und der Messkette geschehen. Ist die Gegend zugleich auch noch ziemlich eben, so wird eine solche sehr oft bloss mit Hülfe der Messkette und des Winkelkreuzes (Winkelspiegels) aufgenommen, wobei man folgendermaassen verfährt.

217.



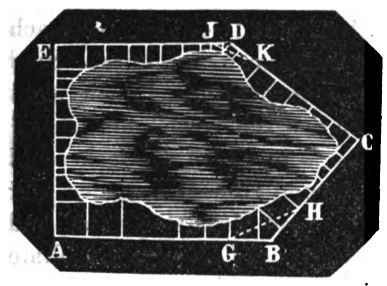
Es sei das Stück Land AB aufzumessen. Der Feldmesser umgeht zuerst dasselbe und entwirft davon in seinem Tagebuch nach dem Augenmaass ein nur halbweg ähnliches Bild. Kann man nun in der aufzumessenden Figur eine Linie, AB, auffinden, von welcher die Eckpuncte C, D, E··· nicht zu weit entfernt sind, so ist es oftmals (namentlich bei langen schmalen Figuren) vortheilhaft, die Lage der Eckpuncte durch Abscissen und Ordinaten zu bestimmen. Während nämlich die Kettenzieher die Kette in der Richtung AB fortziehen, muss der sie begleitende Feldmesser die Länge der Abscissen AP, AP'··· von der Kette ablesen und zugleich mit einem Zehnfussstock, den er rechtwinklig an die Kette anlegt, die Ordinaten PC, P''D··· messen (oder durch einen dritten Gehülfen messen lassen) und die Längen der Abscissen und zugehörigen Ordinaten in seinem Tagebuche bemerken. Sind die Perpendikel (Ordinaten) CP, DP''··· über 50 Fuss lang, so ist es sicherer, sie mit Hülfe des Winkelkreuzes (oder eines Winkelspiegels) zu construiren, sonst aber nimmt man den rechten Winkel nur nach Augenmaas. Hat die aufzumessende Figur krummlinigte Grenzen, so muss man so viele Ordinaten messen, dass man die zwischen je zwei Ordinaten liegenden Bögen practisch als grade Linien betrachten kann. Werden die Ordinaten zu lang und zu viele, so muss man mehrere neue Abscissenlinien, HK, KL··· zu Hülfe nehmen.

Obgleich das Messen sehr vieler Coordinaten zeitraubend und höchst langweilig ist, so ist dieses doch bei Aufnahme krummer Wege, Gräben, Flüsse und Grenzen durchaus nothwendig.

Lässt sich eine aufzunehmende Figur durch Diagonalen

in lauter Dreiecke zerlegen, die nicht gar zu spitze Winkel haben, so kann man auch dies thun, indem man dann alle Seiten der an einander hängenden Dreiecke misst, und ihre Länge in dem von der Figur nur flüchtig entworfenen Bilde notirt.

Auch kann und muss man sehr oft eine Figur durch eine andere Hülfs-Figur aufnehmen, die man in oder um erstere construirt, und deren Seiten man dann als Abscissenlinien annimmt. Ist die Hülfs-Figur ein Viereck, Fünfeck etc., so ist es wortheilhaft, wenn sie möglichst viel rechte Winkel hat, weil sich diese am leichtesten mit dem Winkelkreuz construiren lassen. Eine Hülfsfigur muss namentlich construirt werden, um eine andere aufzunehmen, deren Inneres unzugänglich ist, z. B. ein Morast, Teich, Wald etc. Es ist wohl einleuchtend, dass man unter Umständen auch alle drei Methoden mit einander verbinden kann.



Nachdem nun die Aufnahme auf die eine oder andere Weise geschehen, ist es sehr leicht, ein genaueres Bild oder Charte davon zu entwerfen. Man braucht nämlich nur die Längen sämmtlicher gemessenen und notirten Coordinaten und Dreiecksseiten nach einem verjüngten Maassstabe aufzutragen, und die Endpuncte der Ordinaten durch einen freien Handzug zu verbinden.

Bei der Entwerfung der im letzten Beispiele angenommenen fünfseitigen Hülfsfigur wird man bemerken, dass, nachdem die drei rechtwinklig an einander stossenden Seiten, AB, AE, ED, nach dem verjüngten Maassstab genau aufgetragen worden, und man nun mit den, vom verjüngten Maassstab abgemessenen Längen der beiden andern Seiten, BC, DC, zwei Bögen beschreibt, der Durchschnittspunct derselben vollkommen bestimmt ist, und in der Charte die Lage des Punctes C darstellt, es mithin nicht nöthig ist, die beiden Winkel B und D auf dem Felde noch zu messen, was sonst durch die Aufmessung der beiden Dreiecke GBH und JDK geschehen könnte.

Nach demselben Maassstab, nach welchem eine Charte gezeichnet worden, kann man nun auch den Abstand je zweier Puncte, welcher auf dem Felde gar nicht gemessen worden, unmittelbar auf der Charte messen; und die wirkliche Nachmessung auf dem Felde könnte entscheiden, ob die Charte richtig ist.

Was die Bestimmung des Flächeninhalts einer aufgemessenen Figur betrifft, zu welchem Zweck eine ökonomische Aufnahme hauptsächlich gemacht wird, so ist es am besten, diesen aus den Zahlen der unmittelbar gemessenen Coordinaten und Dreiecksseiten zu berechnen, und die Trapeze, welche je zwei Ordinaten mit dem zwischen ihnen liegenden Stück der Abscissenlinie bilden, nach §. 103, die Dreiecke aber nach §. 197 zu berechnen, und alles zusammen zu addiren. Sind aber die Zahlen der unmittelbar gemessenen Linien nicht vorhanden, so muss man freilich den Inhalt nach der Charte bestimmen, indem man diese in schickliche Dreiecke und Trapeze etc. zerlegt, Grundlinien und Höhen nach dem der Charte zu Grunde liegenden verjüngten Maassstab misst, und die Dreiecke und Trapeze berechnet. Genauere Resultate giebt in diesem Falle aber die §. 204 erklärte Methode.

Unter den verschiedenen künstlichen, für Catasterbureaux wichtigen Instrumenten, mittelst deren man den Inhalt einer Charte näherungsweise, aber sehr schnell, ohne alle Rechnung und Messung bestimmen kann, verdient erwähnt zu werden: der von *Ernst* in Paris nach den Ideen des Berner Ingenieurs *Oppikofer* construirte Flächenmesser. Dieses äusserst sinnreiche, etwa 70 ℛℓ. kostende Instrument, braucht nur längs des Umfangs um die Figur herumgeführt zu werden, und kann man dann aus der Stellung der Zeiger den Inhalt unmittelbar ablesen. Es findet sich beschrieben und abgebildet in dem *Bulletin de la société d'encouragement* 1841, p. 402. In demselben *Bulletin* 1850, p. 100 befindet sich noch ein neuerer von *Beuvière* erfundener Flächenmesser beschrieben und abgebildet. Ein noch neuerer von *Wetli* erfundener und von *Stampfer* in Dingler's polyt. Journal 1850, Heft 6, beschriebener Flächenmesser soll nach *Stampfer's* Urtheil der beste von allen sein. Preis etwa 170 fl. C.-M. Wie uns scheint, gründet sich die Construction dieser Instrumente auf der §. 204 aufgestellten Formel. In einer kleinen Brochüre von *J. Amsler* 1856 wird

noch ein neuerer Flächenmesser beschrieben, welcher viel einfacher und billiger sein soll. Ferner sind noch die von *Hansen* und *Bauernfeind* erfundenen Flächenmesser zu erwähnen.

Die Grösse des verjüngten Maassstabes, nach welcher eine Charte aufgetragen wird, richtet sich nach der Grösse der aufgemessenen Figur. Wäre z. B. die grösste Ausdehnung derselben 10000 Fuss (eine halbe Meile) und soll die Charte davon auf ein Blatt Papier kommen, dessen grösste Ausdehnung 1 Fuss ist, so ist klar, dass auf der Charte (deren Maassstab Einzehntausendtel des wirklichen ist) 1000 Fuss auf 1 Zoll, 100 Fuss auf $\frac{1}{10}$ Zoll kommen, kleinere Längen von 1, 2, 3 Fuss nicht mehr deutlich dargestellt werden können, und man den Inhalt darnach nur näherungsweise bestimmen kann. Charten, welchen noch viel kleinere Maassstäbe zu Grunde liegen, dienen nur dazu, eine Vorstellung von der Form des Landes, von der Lage der Hauptörter, dem Laufe der Flüsse etc. zu geben. Dies gilt namentlich von den Charten, welche auf einem Bogen Papier ganze Welttheile darstellen. Auf solchen finden nur die bedeutendsten Oerter, Flüsse etc. Platz, indem hier selbst Meilen grosse Ausdehnungen in Puncte verschwinden.

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.